Brown 表現定理

表現可能関手とは、圏論的な言葉でいうとある特別な対象に向かう射の集合によってあらわされる（反変）関手である。ホモトピー論に限って言うならば、写像のホモトピー集合 $[-, B]$ と書き表されるものである。代表的なものは、主 G 束の同型類だったり、K-理論だったり、ここで紹介するコホモロジーだったりする。

定義 0.1. 基点付き空間 Y に対し、$F_Y : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$ を、$F_Y(X) = [X, Y]_*$ で定義すれば、これは反変関手であり、ホモトピー同値写像を同型射に移すホモトピー関手である。今、$F : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$ を反変ホモトピー関手とする。基点付き空間 Y と、自然同型

$$\varphi : F_Y \longrightarrow F$$

が存在するとき、F は表現可能と呼び、Y を F の分類空間と呼ぶ。

定義 0.2. $F : \mathbf{CW}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$ を反変ホモトピー関手とする。F が次の二つの条件を満たすとき、F を Brown 関手と呼ぶ。

1. 基点付き CW 複体の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、$i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow \vee X_\lambda$ を包含写像とすると、そこから誘導される
$$\prod i_\lambda^* : F(\vee X_\lambda) \longrightarrow \prod F(X_\lambda)$$
が同型である。

2. X を CW 複体とし、A, B をその部分複体で、$A \cup B = X$ をする。このとき、包含写像からなる可換図があるが、
$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "j_A"] \arrow[d, "j_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & X \end{tikzcd}$$
これに F を施し、
$$\begin{tikzcd} F(A \cap B) & F(A) \arrow[l, "j_A^*"'] \\ F(B) \arrow[u, "j_B^*"] & F(X) \arrow[l, "i_B^*"] \arrow[u, "i_A^*"'] \end{tikzcd}$$
の可換図を考えたとき、$a \in F(A)$, $b \in F(b)$ で $j_A^*(a) = j_B^*(b)$ のとき、$x \in F(X)$ で $i_A^*(x) = a$, $i_B^*(x) = b$ となるものが存在する。

注意 0.3. 上記の条件はいずれも、F は余極限を極限に変換することを示唆している。

例 0.4. $F_Y : \mathbf{CW}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$ は Brown 関手である。

証明 写像の集合を考えれば、$\mathbf{Top}(\vee X_\lambda, Y)_* \cong \prod \mathbf{Top}(X_\lambda, Y)_*$ であることはすぐにわかる。ホモトピーの同値関係で割っても、これは保たれるので、

$$\prod i_\lambda^* : [\vee X_\lambda), Y]_* \xrightarrow{\cong} \prod [X_\lambda, Y]_*$$

を満たすことは良い。また、$[f] \in [A, Y]_*, [g] \in [B, Y]_*$ に対し、$j_A^*[f] = j_B^*[g]$ とする。つまり、$f \circ j_A \simeq g \circ j_B$ である。これが、$\simeq$ でなく $=$ であれば、二つの写像を張り合わせて求める写像ができるが、ホモトピックなのでこのホモトピーを、

$$H : (A \cap B) \times I \longrightarrow Y$$

とおく。$H_0 = f \circ j_A$, $H_1 = g \circ j_B$ である。また、$j_A : A \cap B \longrightarrow A$ がコファイブレーションであるため、

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[rr] \arrow[dd, "j_A"'] & & (A \cap B) \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] & & A \times I \arrow[ul, dotted, "\widetilde{H}"]
\end{tikzcd}$$

を可換にする $\widetilde{H} : A \times I \longrightarrow Y$ が存在する。$h = \widetilde{H}_1 : A \longrightarrow Y$ とおくと、$h \simeq f$ であり、$h \circ j_A = g \circ j_B$ となる。よって、

$$h \cup g : X \longrightarrow Y$$

が定義でき、$i_A^*[h \cup g] = [h] = [f]$, $i_B^*[h \cup g] = [g]$ となる。 □

例 0.5. 任意のアーベル群 M に対し、M を係数にもつ被約コホモロジー関手

$$\widetilde{H}^*(\quad ; M) : \mathbf{CW}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$$

は Brown 関手である。

証明 最初の条件はコホモロジーの直和を直積に変換する性質から。二つ目のは Mayer-Vietoris 完全列から示される。 □

補題 0.6. F を Brown 関手とすると、一点空間 X に対し、$F(X)$ は一点空間である。

証明 Wedge 和を直積に移す性質から、対角写像

$$\Delta : F(X) = F(X \vee X) \longrightarrow F(X) \times F(X)$$

が同型であるが、このことから $x, y \in F(X)$ で、$x \neq y$ が存在すれば矛盾するため、$F(X)$ は 1 点集合である。 □

定義 0.7. F : Brown 関手、$n \geqq 1$ に対し、$F(S^n)$ 上の群構造を以下で定める。$p : S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$ を押しつぶし写像とする。よって、

$$\mu : F(S^n) \times F(S^n) \cong F(S^n \vee S^n) \xrightarrow{p^*} F(S^n)$$

で定義する。これが積であるかだが、

$$1 \vee p : S^n \vee S^n \longrightarrow S^n \vee S^n \vee S^n$$

と、

$$p \vee 1 : S^n \vee S^n \longrightarrow S^n \vee S^n \vee S^n$$

がホモトピックであるため、結合律がまず成り立つ。また、単位元は、一点空間 $*$ への定置写像、$c : S^n \longrightarrow *$ に対し、$F(*)$ は一点空間であるから、$F(c) : F(*) \longrightarrow F(S^n)$ の像により、$e \in F(S^n)$ が定まり、

$$S^n \xrightarrow{p} S^n \vee S^n \xrightarrow{1 \vee c} S^n \vee \{*\} \cong S^n$$

は恒等射とホモトピックであるため、e が単位元であることがわかる。最後に逆元だが、$\pi_n(S^n) = [S^n, S^n]_*$ が群であるため、$[1_{S^n}] \in \pi_n(S^n)$ の逆元を $[\iota] \in \pi_n(S^n)$ とおく。ここで、$\iota : S^n \longrightarrow S^n$ であり、$\iota \circ 1_{S^n} \simeq c$, $1_{S^n} \circ \iota \simeq c$ である。これより、$x \in F(S^n)$ に対し、$F(\iota)(x) \in F(S^n)$ が逆元である。

定義 0.8. $F : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$ を反変ホモトピー関手とする。基点付き空間 Y と、$u \in F(Y)$ に対し、自然変換

$$\varphi_u : F_Y \longrightarrow F$$

を、$\varphi_u[f] = F(f)(u)$ で定義する。

命題 0.9. F を Brown 関手、$n \geqq 1$、Y を CW 複体、$u \in F(Y)$ に対し、

$$\varphi_u : F_Y(S^n) \longrightarrow F(S^n)$$

は準同型である。

証明 φ_u の自然性から、

$$\begin{tikzcd}
F_Y(S^n) \times F_Y(S^n) \arrow[r, "\varphi\times\varphi"] & F(S^n) \times F(S^n) \\
F_Y(S^n \vee S^n) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p^*"'] & F(S^n \vee S^n) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[d, "p^*"] \\
F_Y(S^n) \arrow[r, "\varphi"'] & F(S^n)
\end{tikzcd}$$

が可換となる。 □

定義 0.10. $F : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$ は反変ホモトピー関手で、$u \in F(Y)$ に対し、

$$\varphi_u : F_Y(S^m) \longrightarrow F(S^m)$$

が、$m < n$ のとき単射で、$m \leqq n$ のとき全射となるとき、u を Y に関する F の n 普遍要素 とよび、$n = \infty$ のとき単に普遍要素とよぶ。

定理 0.11. F を Brown 関手とすると、任意の CW 複体 Y と $u \in F(Y)$ に対し、Y を含む CW 複体 W と普遍要素 $w \in F(W)$ が存在し、$i : Y \longrightarrow W$ を包含写像としたとき、$i^*(w) = u$ を満たす。

証明 $Y_{-1} = Y$, $u_{-1} = u$ とおき、次の条件を満たす Y_n, $u_n \in F(Y_n)$ を以下のように帰納的に定義する。

1. Y_{n+1} は Y_n に $(n+1)$-胞体を接着した空間であり、$i_n : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$ を包含写像とすると、$i_n^*(u_{n+1}) = u_n$
2. u_n は F の n 普遍要素

今、上記の Y_n, $u_n \in F(Y_n)$ が定義されたとする。

$$\varphi_{u_n} : F_{Y_n}(S^m) \longrightarrow F(S^m)$$

は、$m < n$ のとき単射、$m \leqq n$ のとき全射である。$m = n$ のとき、$\Lambda = \mathrm{Ker}\varphi_{u_n}$ とおき、$\lambda \in \Lambda$ の代表元を、$f_\lambda : S^n_\lambda \longrightarrow Y_n$ とおくとき、$f = \vee f_\lambda : \vee S^n_\lambda \longrightarrow Y_n$ で定義すると、

$$Y_{n+1} = C_f \vee \left(\bigvee_{\omega \in F(S^{n+1})} S^{n+1}_\omega \right)$$

とおく。Y_{n+1} は Y_n に $(n+1)$-胞体を接着した空間である。Y_{n+1} の部分複体

$$A = Y_n \cup \vee S^n_\lambda \times [0, 1/2]$$

と、

$$B = \vee S^n_\lambda \times [1/2, 1] \vee (\vee S^{n+1}_\omega)$$

を定義する。これより、A は Y_n, B は $\vee\, S^{n+1}_\omega$ の強変位レトラクトであり、$A \cap B \cong \vee S^n_\lambda$ となる事がわかる。$u_n \in F(Y_n) \cong F(A)$ での像を $u'_n \in F(A)$ とする。ところで

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\simeq"] & Y_n \\
A \cap B \arrow[u, "j_A"] \arrow[r, "\cong"'] & \vee S^n_\lambda \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

はホモトピー可換であるため、

$$\begin{tikzcd} F(Y_n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f^*"'] & F(A) \arrow[d, "j_A^*"] \\ F(\vee S_\lambda^{n+1}) \arrow[r, "\cong"'] & F(A\cap B) \end{tikzcd}$$

が可換となる。ここで、$f_\lambda \in \mathrm{Ker}\varphi_n$ であったので、

$$f^*(u_n) = j_A^*(u_n') = 0 \in F(\vee S_\lambda^{n+1}) \cong \prod F(S_\lambda^{n+1})$$

である。また、

$$\{\omega\} \in \prod F(S_\omega^{n+1}) \cong F(\vee S_\omega^{n+1}) \cong F(B)$$

において、その像を $v \in F(B)$ とおくが、

$$A\cap B \xrightarrow{j_B} B \xrightarrow{\simeq} \vee S_\omega^{n+1}$$

が定値写像であるため、$j_B^*(v) = 0$ がわかる。Brown 関手の定義により、$u_{n+1} \in F(Y_{n+1})$ が存在し、$i_A^*(u_{n+1}) = u_n'$, $i_B^*(u_{n+1}) = v$ を満たす。つまり、$i_n^*(u_{n+1}) = u_n$ である。u_{n+1} が $(n+1)$-普遍要素であることは以下のように示される。

$$\begin{tikzcd} \pi_m(Y_n) = F_{Y_n}(S^m) \arrow[rr, "i_n^*"] \arrow[dr, "\varphi_{u_n}"'] & & F_{Y_{n+1}}(S^m) = \pi_m(Y_{n+1}) \arrow[dl, "\varphi_{u_{n+1}}"] \\ & F(S^m) & \end{tikzcd}$$

の可換図で、Y_{n+1} が Y_n に $(n+1)$-胞体を貼り付けた空間であったから、(Y_{n+1}, Y_n) は n-連結。これより、$m \leqq n$ に対し、$\pi_m(Y_{n+1}, Y_n) = 0$ である。ホモトピー群の完全列から、

$$i_{n*} : \pi_m(Y_n) \longrightarrow \pi_m(Y_{n+1})$$

が、$m < n$ において単射、$m \leqq n$ において全射となるため、u_{n+1} が n-普遍要素であることは容易にわかる。さらに、$m = n$ のとき、$[\alpha] \in F_{Y_{n+1}}(S^n)$ に対し、$\varphi_{u_{n+1}}[\alpha] = 0$ とする。$(i_n)_*$ が全射であることから、$(i_n)_*[\beta] = [\alpha]$ となる $[\beta] \in F_{Y_n}(S^n)$ が存在する。

$$\varphi_{u_n}[\beta] = \varphi_{u_{n+1}}[\alpha] = 0$$

なので、$[\beta] \in \mathrm{Ker}\varphi_{u_n}$ である。このとき、

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "*"'] & Y_n \arrow[d, "i_n"] \\ C_\beta \arrow[r, "\subset"'] & Y_{n+1} \end{tikzcd}$$

がホモトピー可換であるから、$\alpha \simeq i_n \circ \beta \simeq *$ より、$[\alpha] = 0$ である。これより、$m = n$ のとき、$\varphi_{u_{n+1}}$ は単射。次に、$m = n+1$ のとき、$\omega \in F(S^{n+1})$ に対し、

$$g_\omega : S^{n+1} \longrightarrow Y_{n+1} = C_f \vee (\vee S_\omega^{n+1})$$

を包含写像で定義すると、

$$\varphi_{u_{n+1}}[g_\omega] = g_\omega^*(u_{n+1}) = \omega$$

となるため、$\varphi_{u_{n+1}}$ が全射であることもわかった。以上より、u_{n+1} は $(n+1)$-普遍要素である。よって、$Y_\infty = \mathrm{colim} Y_n$ で定義し、付随する包含写像 $j_n : Y_n \longrightarrow Y_\infty$ からは、

$$j_n^* : F(Y_\infty) \longrightarrow F(Y_n)$$

が誘導されるが、同時に極限の性質から自然な写像

$$h : \prod F(Y_n) \longrightarrow F(Y_\infty)$$

が存在する。また、極限の性質から、$u_\infty \in \prod F(Y_n)$ が存在し、$p_n(u_\infty) = u_n$ を見たす。今、$u'_\infty = h(u_\infty) \in F(Y_\infty)$ とおくと、$j_n^*(u'_\infty) = u_n$ を満たす。u'_∞ が普遍要素であることは、$F_{Y_\infty}(S^m) = [S^m, Y_\infty] \cong [S^m, Y_n]$ となる n が存在することから明らかである。 □

補題 0.12. $F : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$ を反変ホモトピー関手とする。$u \in F(Y)$, $v \in F(Z)$ をそれぞれ F の普遍要素とする。$f : Y \longrightarrow Z$ が、$f^*(v) = u$ を満たせば、f は弱ホモトピー同値である。

証明 次の図式

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(Y) = F_Y(S^n) \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\varphi_u"'] & & F_Z(S^n) = \pi_n(Z) \arrow[dl, "\varphi_v"] \\
& F(S^n) &
\end{tikzcd}$$

が可換になるためである。 □

命題 0.13. F を Brown 関手とし、$u \in F(Y)$ を普遍要素とする。CW 複体対 (X, A) で $v \in F(X)$ と、$g : A \longrightarrow Y$ が、包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ に対し、$i^*(v) = g^*(u)$ を満たすとき、g の拡張 $\tilde{g} : X \longrightarrow Y$ が存在し、$\tilde{g}^*(u) = v$ を満たす。

証明 胞体近似定理により、g は胞体写像と仮定してよい。両側写像柱

$$Z = X \cup_i (A \times I) \cup_g Y$$

を考えるとこれは CW 複体であり、$j : Y \longrightarrow Z$, $k : X \longrightarrow Z$ をそれぞれ包含写像とすると、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "k"] \\
Y \arrow[r, "j"'] & Z
\end{tikzcd}$$

はホモトピー可換である。これより、

$$\begin{tikzcd}
F(Z) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "j^*"'] & F(X) \arrow[d, "i^*"] \\
F(Y) \arrow[r, "g^*"'] & F(A)
\end{tikzcd}$$

は可換。ここで Z の部分空間 $X' = X \cup A \times [0, 1/2]$, $Y' = Y \cup A \times [1/2, 1]$ とおくと、$X' \simeq X$, $Y' \simeq Y$, $X' \cap Y' \cong A$ となる。$F(X') \cong F(X)$, $F(Y') \cong F(Y)$ であるので、$u \in F(Y)$, $v \in F(X)$ に対応する元をそれぞれ、$u' \in F(Y')$, $v' \in F(X')$ とおく。Brown 関手の性質から、$k^*(z) = v'$, $j^*(z) = u'$ を満たす $z \in F(Z)$ が存在する。定理 0.11 により、Z を含む CW 複体 W と普遍要素 $w \in F(W)$ が存在し、包含写像 $\ell : Z \longrightarrow W$ に対し、$\ell^*(w) = z$ を満たす。ここで、$(\ell \circ j)^*(w) = j^* \circ \ell^*(w) = u$ である。w, u はともに普遍要素であるから、補題 0.12 により、$\ell \circ j : Y \longrightarrow W$ は弱ホモトピー同値写像である。Y, W はともに CW 複体なので、Whitehead の定理からこれはホモトピー同値写像である。このホモトピー逆写像を $h : W \longrightarrow Y$ とおき、

$$g' = h \circ \ell \circ k : X \longrightarrow Y$$

と定義する。$j \circ h \circ \ell \simeq 1_Z$ により、

$$(g')^*(u) = (h \circ \ell \circ k)^*(j^*(z)) = k^*(j \circ h \circ \ell)^*(z) = k^*(z) = v$$

である。残念ながらこれは g の拡張ではない。実際、

$$g' \circ i = h \circ \ell \circ k \circ i \simeq h \circ \ell \circ j \circ g \simeq g$$

であり、ホモトピックにしかならない。ただし、今 $i : A \hookrightarrow X$ がコファイブレーションなので、ホモトピー拡張性質を使えば、$\tilde{g} \simeq g'$ であり、$\tilde{g} \circ i = g$ となる写像が構成できる。よって、$\tilde{g}^*(u) = v$ を満たす。 □

定理 0.14. Brown 関手は表現可能であり、分類空間はすべて弱ホモトピー同値となる。また、CW 複体の分類空間が存在する。

証明 F を Brown 関手とすると、定理 0.11 により、1 点空間から始めると基点付き CW 複体 Y と普遍要素 $u \in F(Y)$ が存在する。このとき、任意の基点付き CW 複体 X に対し、

$$\varphi_u : F_Y(X) \longrightarrow F(X)$$

を考える。$v \in F(X)$ に対し、基点への包含写像 $g : * \longrightarrow Y,\ i : * \longrightarrow X$ を考えれば、$g^*(u) = i^*(v)$ であるので、命題 0.13 を $(X, *)$ に適用すると、$\tilde{g} : X \longrightarrow Y$ で、$\tilde{g}^*(u) = v$ となるものが存在する。$\tilde{g} \in F_Y(X)$ であり、$\varphi_u(\tilde{g}) = v$ なので、φ_u は全射である。また、$[f_0], [f_1] \in F_Y(X)$ に対し、$\varphi_u[f_0] = \varphi_u[f_1]$ を仮定する。$v = f_0^*(u) = f_1^*(u) \in F(X)$ とおく。ここで、

$$f : X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{*\} \times I \xrightarrow{\simeq} X \vee X \xrightarrow{f_0 \vee f_1} Y$$

と定義する。また、$F(X \times I) \cong F(X)$ なので、$v \in F(X)$ に対応する元を $v' \in F(X \times I)$ とおけば、

$$f^*(u) = i^*(v') = (v, v) \in F(X) \times F(X) \cong F(X \vee X)$$

である。ただし、i は包含写像である。命題 0.13 により、f の拡張 $\tilde{f} : X \times I \longrightarrow Y$ が存在するので、$f_0 \simeq f_1$ である。これより、φ_u は単射になるため、

$$\varphi_u : F_Y(X) \longrightarrow F(X)$$

が全単射となるので、F は表現可能であり、CW 複体 Y が分類空間である。ここで、Z を F の任意の分類空間とすると、上記の Y に対しても、

$$\psi_Y : F_Z(Y) \longrightarrow F(Y)$$

という自然な全単射が存在するが、$[h] = \psi_Y^{-1}(u) \in F_Z(Y)$ とおくと、$h : Y \longrightarrow Z$ である。一方で、

$$\psi_Z : F_Z(Z) \longrightarrow F(Z)$$

も全単射であり、$z = \psi_Z[1_Z] \in F(Z)$ とおく。

$$\varphi_z : F_Z(S^m) \longrightarrow F(S^m)$$

を考えると、$[\alpha] \in F_Z(S^m)$ に対し、

$$\varphi_z[\alpha] = \alpha^*(z) = \alpha^* \circ \psi_Z[1_Z] = \psi_{S^m} \circ \alpha^*[1_Z] = \psi_{S^m}[\alpha]$$

なので、$\varphi_z = \psi_{S^m}$ となる。よって、φ_z も全単射なので、z が普遍要素であることがわかる。よって、

$$h^*(z) = h^* \circ \psi_Z[1_Z] = \psi_Y \circ h^*[1_Z] = \psi_Y[h] = u$$

となるため、補題 0.12 によって、h は弱ホモトピー同値である。 □

これより、（被約）コホモロジー群は Brown 関手であるため、ホモトピー集合で表現できる。

注意 0.15 (Eilenberg MacLane 空間の構成法その２)**.** π をアーベル群とする。被約コホモロジー関手

$$\widetilde{H}^n(\quad; \pi) : \mathbf{CW}_* \longrightarrow \mathbf{Set}$$

は Brown 関手で表現可能であるため、分類空間 B が存在して、$F_B \cong \widetilde{H}^n(\quad; \pi)$ となる。よって S^n に対し、$\pi_n(B) = [S^n, B] \cong \widetilde{H}^n(S^n; \pi)$ となり、B が $K(\pi, n)$ であることがわかる。