Moore 空間は homology 群を用いて定義した。では、homotopy 群に変えてみてはどうだろうか？

Definition 0.0.1

π をアーベル群、n を非負整数とする。X が (π, n) 型の Eilenberg-MacLane 空間であるとは、

$$\pi_m(X) = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる空間である。一般に (π, n) 型の Eilenberg-MacLane 空間を $K(\pi, n)$ とかく。

この定義を見てやはり思いつくのは S^n であるが、残念ながら一般には S^n は $(\mathbf{Z}, n)$ 型の Eilenberg-MacLane 空間ではないのは Topology を勉強すれば、誰でも知っている。まぁ、かろうじてだが次は言える。

Example 0.0.2

S^1は、$K(\mathbf{Z}, 1)$ である。

以下で胞体を接着して Moore 空間から Eilenberg-MacLane 空間を構成する方法を見てみよう。

Lemma 0.0.3

$f : X \longrightarrow Y$ に対し、$j : Y \longrightarrow C_f$ を inclusion とすると、$j \circ f \simeq *$

proof)　　M_f においては、高さ 1 への inclusion

$$i : X \longrightarrow M_f$$

に対し、$j \circ f \simeq i$ であるため、M_f の高さ 1 をつぶした C_f においては、$j \circ f \simeq *$

$\square$

Theorem 0.0.4

X を位相空間とし、$n \geqq 0$ に対し、X に $n+2$ 次元以上の cell を接着した空間 Y が存在し、

$$j_n : X \longrightarrow Y$$

を inclusion とすると、

$$j_{n*} : \pi_m(X) \xrightarrow{\cong} \pi_m(Y) \qquad (m \leqq n)$$

であり、

$$\pi_m(Y) = 0 \qquad (m > n)$$

となる。

proof)　　$X = X_n$ とおく。$\pi_{n+1}(X_n) = \{\ u_\lambda \ |\lambda \in \Lambda\}$ とし、u_λ の代表元

$$f_\lambda : S^{n+1} \longrightarrow X_n$$

を選んでおく。これより、

$$f_n = \vee f_\lambda : \vee S^{n+1} \longrightarrow X_n$$

と定義し、$C_{f_n} = X_{n+1}$ とおく。$X_{n+1} = X_n \cup C(\vee S^{n+1})$ であり、] $C(\vee S^{n+1})$ は $n+2$ 次元の cell であるため、(X_{n+1}, X_n) は $n+1$ 連結である。(X_{n+1}, X_n) のホモトピー完全列を考えれば、

$$\longrightarrow \pi_{m+1}(X_{n+1}, X_n) \longrightarrow \pi_m(X_n) \longrightarrow \pi_m(X_{n+1}) \longrightarrow \pi_m(X_{n+1}, X_n) \longrightarrow$$

において、$m \leqq n+1$ に対し、$\pi_m(X_{n+1}, X_n) = 0$ なので、$i_n : X_n \longrightarrow X_{n+1}$ に対し、

$$i_{n*} : \pi_m(X_n) \longrightarrow \pi_m(X_{n+1})$$

は、$m \leqq n$ のとき同型であり、$m = n+1$ のとき全射である。Lemma 0.0.1 により、$i_n \circ f_\lambda \simeq *$ であるため、$i_{n*}(u_\lambda) = 0$。これより、$\pi_{n+1}(X_{n+1}) = 0$。よって、帰納的に、

$$X = X_n \subset X_{n+1} \subset X_{n+2} \subset \cdots$$

の列ができるため、$Y = \displaystyle\bigcup_{m=n}^{\infty} X_m$ で定義すれば、π_* が sequential colimit と可換であるから、$m \leqq n$ に対し、inclusion からの誘導により、

$$\pi_m(X_n) \cong \pi_m(X_{n+1}) \cong \pi_m(X_{n+2}) \cong \cdots \cong \pi_m(Y)$$

となり、さらに、$m > n$ のとき、

$$0 = \pi_m(X_m) \cong \pi_m(X_{m+1}) \cong \cdots \cong \pi_m(Y)$$

となる。

□

上記のような空間 Y を X の $n+1$ 次元以上の homotopy 群を消した空間と呼び、$X(0,n)$ とかくことにする。

Theorem 0.0.5

X, Y を位相空間、$n \geqq 0$ の整数とし、$m > n$ に対し、$\pi_m(Y) = 0$ とする。このとき、任意の写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し、その拡張、

$$\tilde{f} : X(0,n) \longrightarrow Y$$

が存在する。また、この拡張は X を止めて homotopic を除き一意に存在する。

proof)　　$X(0,n)$ の構成法を思い出す。

$$X_n \subset X_{n+1} \subset X_{n+2} \subset \cdots$$

の帰納的極限であった。そして各 X_k は、

$$p_{k-1} : \vee S^k \longrightarrow X_{k-1}$$

の写像錐であった。帰納的に存在を示す。f の拡張

$$f_k : X_k \longrightarrow Y$$

が存在したとする。ここで、

$$f_{k+1} : X_{k+1} \longrightarrow Y$$

を次のように定義する。

$$f_k \circ p_k : \vee S^{k+1} \longrightarrow Y$$

は、$\pi_k(Y) = 0$ であるため、そのホモトピー

$$H : \vee S^{k+1} \times I \longrightarrow Y$$

は、$H : C(\vee S^{k+1}) \longrightarrow Y$ と考えられる。よって、

$$f_{k+1} = f_k \cup H : X_{k+1} = X_k \cup C(\vee S^{k+1}) \longrightarrow Y$$

で定義できる。この構成を繰り返すことで、求める拡張が得られる。次に一意性を示す。

$$g : X(0,n) \longrightarrow Y$$

を f の任意の拡張とする。この各制限

$$g_k : X_k \longrightarrow Y$$

を考えると、

$$G : C(\vee S^{k+1}) \hookrightarrow X_{k+1} \stackrel{g_{k+1}}{\longrightarrow} Y$$

が定義できる。$G_{|_{\vee S^{k+1}}} = f_k \circ p_k$ であることがわかり、先の H も、$H_{|_{\vee S^{k+1}}} = f_k \circ p_k$ であったので、

$$H \cup G : \Sigma(\vee S^{k+1}) = \vee S^{k+2} \longrightarrow Y$$

が考えられ、$\pi_{k+2}(Y) = 0$ なので、$H \cup G$ の拡張

$$F : \vee D^{k+3} \longrightarrow Y$$

が得れるが、これはつまり、

$$F : C(\vee S^{k+1}) \times I \longrightarrow Y$$

で $H \simeq G$ rel $\vee S^{k+1}$ なるホモトピーと考えられる。これより、

$$f_k \times 1_I \cup F : X_{k+1} \times I \longrightarrow Y$$

によって、$f_{k+1} \simeq g_{k+1}$ rel X_k であることがわかり、帰納的に $\tilde{f} \simeq g$ rel X

□

Corollary 0.0.6

X, Y を位相空間、$n \geqq 0$ の整数とし、$m > n$ に対し、$\pi_m(Y) = 0$ とする。このとき、写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$f_* : \pi_m(X) \longrightarrow \pi_m(Y)$$

が、$m \leqq n$ において同型のとき、f の拡張で weak equivalence である

$$\tilde{f} : X(0,n) \longrightarrow Y$$

が存在する。

Remmark 0.0.7 *(Eilenberg MacLane 空間の構成法その１)*

以前球面の wedge 間の写像の錐によって構成された (π, n) 型のMoore 空間 X に対し、X の $n+1$ 次元以上の homotopy 群を消した空間を Y とする。X は $n-1$ 連結であるため、$n \neq m$ のとき、$\pi_m(Y) = 0$ であり、Hurewiz 定理により、

$$\pi_n(Y) \cong \pi_n(X) \cong \widetilde{H}(X) \cong \pi$$

なので、Y は (π, n) 型の Eilenberg MacLane 空間である。