0.1 Moore 空間

Definition 0.1.1

π をアーベル群、n を非負整数とする。X が (π, n) 型の Moore 空間であるとは、

$$\widetilde{H}_m(X) = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる空間である。一般に (π, n) 型の Moore 空間を $M(\pi, n)$ とかく。

この定義を見て、すぐに思いつく空間が球面である。

Example 0.1.2

S^n は、$(\mathbf{Z}, n)$ 型の Moore 空間である。

さて、$M(\mathbf{Z}, n)$ としては球面があり、加法性定理を用いれば、$K(\mathbf{Z}$ の直和$, n)$ としては、球面の wedge がとれる。では、一般のアーベル群 π に対して、$M(\pi, n)$ は構成できるだろうか。

Lemma 0.1.3

任意のアーベル群 π に対し、次の完全列、

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \pi \longrightarrow 0$$

が存在し、A, B は自由アーベル群として取れる。

proof)　　B をπ から生成される自由アーベル群とし、恒等射 $\pi \longrightarrow \pi$ から誘導される準同型を、

$$g : B \longrightarrow \pi$$

とする。g はつまり、B での形式和を、π での和に対応させるものである。$a \in \pi$ に対し、$g(1a) = a$ であるので、g は全射である。また、$A = \mathrm{Ker} g$ とおけば、これも自由アーベル群であるため、inclusion を f とおけば、

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \pi \longrightarrow 0$$

が完全列となる。

$\square$

Lemma 0.1.4

位相空間 X に対し、$\mathrm{Hom}(\widetilde{H}_n(S^n), \widetilde{H}_n(X)) \cong \widetilde{H}_n(X)$

proof) $f \in \mathrm{Hom}(\widetilde{H}_n(S^n), \widetilde{H}_n(X))$ に対し、$\widetilde{H}_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ であるため、生成元 i_n に対し、$f(i_n) \in \widetilde{H}_n(X)$ を対応させるのは同型となる。

$\square$

Theorem 0.1.5

任意のアーベル群 π と、非負整数 n に対し、$M(\pi, n)$ が存在する。

proof) Lemma 0.0.3 により、次の完全列、

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \pi \longrightarrow 0$$

が存在し、A, B は自由アーベル群が取れる。$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{d_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ を、A, B の基底とする。これより、

$$A \cong \widetilde{H}_n(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} S^n_\lambda)\ ,\ B \cong \widetilde{H}_n(\bigvee_{\omega\in\Omega} S^n_\omega)$$

となるため、これより上記の完全列は、

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} S^n_\lambda) \xrightarrow{f} \widetilde{H}_n(\bigvee_{\omega\in\Omega} S^n_\omega) \xrightarrow{g} \pi \longrightarrow 0$$

となる。ここで、

$$\Phi : [\vee S^n_\lambda, \vee S^n_\omega] \longrightarrow \mathrm{Hom}(\widetilde{H}_n(\vee S^n_\lambda), \widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega))$$

を、$f \in [\vee S^n_\lambda, \vee S^n_\omega]$ に対し、$\Phi(f) = f_*$ とホモロジー群間に誘導される準同型を対応させる。ここで、次の可換図を考える。

$$\begin{tikzcd}
{[\vee S^n_\lambda, \vee S^n_\omega]} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}(\widetilde{H}_n(\vee S^n_\lambda), \widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega)) \arrow[d, "\cong"] \\
\prod_{\lambda\in\Lambda} [S^n_\lambda, \vee S^n_\omega] \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}(\widetilde{H}_n(S^n_\lambda), \widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega)) \arrow[d, "\cong"] \\
\prod_{\lambda\in\Lambda} \pi_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r, "H"'] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega)
\end{tikzcd}$$

最下部の横列の写像は Hurewiz 準同型の直積である。ここで、Hurewiz 定理により H は同型になり、Φ は全射であることがわかる。よって、

$$^\exists h \in [\vee S^n_\lambda, \vee S^n_\omega] \qquad s.t \qquad \Phi(h) = f$$

つまり、$h_* = f$ となるため、h の写像錐 C_h を考える。$(C_h, \vee S^n_\omega)$ のホモロジー完全列を用いるが、ここで $\vee S^n_\omega \hookrightarrow C_h$ は cofibration であるため、

$$H_m(C_h, \vee S^n_\omega) \cong \widetilde{H}_m(\Sigma \vee S^n_\lambda) \cong \widetilde{H}_{m-1}(\vee S^n_\lambda)$$

である。よって、次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_m(\vee S^n_\lambda) \longrightarrow \widetilde{H}_m(\vee S^n_\omega) \longrightarrow \widetilde{H}_m(C_h) \longrightarrow \widetilde{H}_{m-1}(\vee S^n_\lambda)) \xrightarrow{h_*} \widetilde{H}_{m-1}(\vee S^n_\omega) \longrightarrow \cdots$$

$h_* = f$ は単射であったから、$m \neq n$ の時は、$\widetilde{H}_m(C_h) = 0$ である。また、$n = m$ のときは、$\widetilde{H}_{n-1}(\vee S^n_\lambda)) = 0$ となるため、完全列より準同型定理を用いて、

$$\widetilde{H}_n(C_h) \cong \widetilde{H}_m(\vee S^n_\omega)/\widetilde{H}_m(\vee S^n_\lambda) \cong B/A \cong \pi$$

$\square$