## 0.1　（コ）ホモロジーの表現

**Theorem 0.1.1**　（*Brown* 表現定理）

$X$ が（基点つき）CW 複体ならば、任意のアーベル群 $\pi$ に対し、

$$H^n(X;\pi) \cong [X, K(\pi, n)] \quad , \quad \widetilde{H}^n(X,\pi) \cong [X, K(\pi, n)]_*$$

という自然な同型が存在する。

**Theorem 0.1.2**　（*Dold-Thom* 定理）

$X$ が基点つき CW 複体ならば、

$$\widetilde{H}_*(X) \cong \pi_*(Sp(X)) = [S^n, Sp(X)]_*$$

という自然な同型が存在する。

**Theorem 0.1.3**　（*Hurewiz* 定理）

$X$ を $(n-1)$-connected な基点つき空間とすると、

$$h : \pi_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$$

は自然な同型である。

以下で $K(\pi, n)$ を用いたホモロジーの構成法を述べる。

**Lemma 0.1.4**

$X, Y$ は CW 複体で、$X$ または $Y$ が $n$ 連結であるとき、$X \wedge Y$ は $n$ 連結である。

proof)　$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ であることを思い出すと、$X \times Y$ の cell は $X$ の cell と $Y$ の cell の直積で表される。$X$ を $n$ 連結とすると、$X$ の 0-cell がひとつで、$1 \leqq m \leqq n$ における $m$-cell が存在しないということである。よって $X \times Y$ の $m$-cell は、$X$ の 0-cell と $Y$ の $m$-cell の直積の形で表せる。しかし、それは $X \vee Y$ に含まれるため、$X \wedge Y$ の $m$-cell は存在せず、0-cell もただひとつである。よって、$X \wedge Y$ は $n$ 連結である。

**Lemma 0.1.5**

$X, Y$ を基点付き位相空間とすると、

$$\Sigma(X \wedge Y) \cong \Sigma X \wedge Y \cong X \wedge \Sigma Y$$

proof)　　各空間は商空間で表せて、

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y = X \times Y / \{*\} \times Y \cup X \times \{*\}$$

でありまた、

$$\Sigma X = X \times I / X \times \partial I \cup \{*\} \times I$$

であることに注意すると、

$$\Sigma(X \wedge Y) \cong X \times Y \times I / X \times \{*\} \times I \cup \{*\} \times Y \times I \cup X \times Y \cup \partial I$$

であり、同様に、$\Sigma X \wedge Y$ や、$X \wedge \Sigma Y$ も右辺と同相になることがわかる。

□

## Lemma 0.1.6

$\Omega K(\pi, n+1)$ は、$(\pi, n)$ 型 の Eilenberg MacLane 空間である。

proof)　　$\pi_m(\Omega K(\pi, n+1)) \cong \pi_{m+1}(K(\pi, n+1))$ であるため。

□

## Definition 0.1.7

$(\pi, n)$ 型の Eilenberg MacLane 空間は同じ弱ホモトピー型を持つので、$K(\pi, n) = \Omega K(\pi, n+1)$（正確には弱ホモトピー同値）と見ることができる。恒等射（正確には weak equivalence）

$$K(\pi, n) \xrightarrow{=} \Omega K(\pi, n+1)$$

の随伴写像を、

$$\sigma : \Sigma K(\pi, n) \longrightarrow K(\pi, n+1)$$

と定義する。

$$\begin{aligned}
\pi_{m+n}(X \wedge K(\pi, n)) &\xrightarrow{\Sigma} \pi_{m+n+1}(\Sigma(X \wedge K(\pi, n))) \\
&\xrightarrow{\cong} \pi_{m+n+1}(X \wedge \Sigma K(\pi, n)) \\
&\xrightarrow{(1\wedge\sigma)_*} \pi_{m+n+1}(X \wedge K(\pi, n+1))
\end{aligned}$$

の写像が定義され、よって次の列

$$\cdots \longrightarrow \pi_{m+n}(X \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \pi_{m+n+1}(X \wedge K(\pi,n+1)) \longrightarrow \pi_{m+n+2}(X \wedge K(\pi,n+2)) \longrightarrow \cdots$$

が誕生する。これにより、$n$ に関するアーベル群の帰納的極限、$\mathrm{colim}_n \pi_{m+n}(X \wedge K(\pi,n))$ が定義できる。

## Lemma 0.1.8

$\sigma : \Sigma K(\pi,n) \longrightarrow K(\pi,n+1)$ において、

$$\sigma_* : \pi_{n+1}(\Sigma K(\pi,n)) \longrightarrow \pi_{n+1}(K(\pi,n+1))$$

は同型である。

proof)　　unit 写像 $\eta : K(\pi,n) \longrightarrow \Omega\Sigma K(\pi,n+1)$ に対し、

$$\Omega(\sigma) : \Omega\Sigma K(\pi,n+1) \longrightarrow \Omega K(\pi,n+1)$$

の合成を考えると、これは恒等射（正確には weak eqivalence）になる。よって、

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(K(\pi,n)) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[dr, "\Sigma"'] & \pi_n(\Omega\Sigma K(\pi,n)) \arrow[r, "\Omega(\sigma)_*"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(\Omega K(\pi,n+1)) \arrow[d, "\cong"] \\
& \pi_{n+1}(\Sigma K(\pi,n)) \arrow[r, "\sigma_*"'] & \pi_{n+1}(K(\pi,n+1))
\end{tikzcd}$$

次の図式が可換となり、$K(\pi,n)$ が $n-1$ 連結なので、Frudenthal suspention 定理から、

$$\Sigma : \pi_n(K(\pi,n)) \longrightarrow \pi_{n+1}(\Sigma K(\pi,n))$$

は同型であり、$\eta_*$ が同型になり、上列の合成が同型なので、$\Omega(\sigma)_*$ も同型。ようやく、$\sigma_*$ が同型になる。

□

## Theorem 0.1.9

$X$ を基点付きのCW 複体、$\pi$ をアーベル群とすると、

$$\widetilde{H}_m(X;\pi) \cong \mathrm{colim}_n \pi_{m+n}(X \wedge K(\pi,n))$$

proof)　reduced homology theory の５つの公理を確かめてみる。

ー次元公理ー

$X = S^0$ のとき、$X \wedge K(\pi, n) \cong K(\pi, n)$ であるため、

$$\pi_{m+n}(X \wedge K(\pi, n)) \cong \pi_{m+n}(K(\pi, n))$$

となる。よって、$m \neq 0$ ならば、 $\pi_{m+n}(K(\pi, n)) = 0$ となるため、

$$\mathrm{colim}_n \pi_{m+n}(X \wedge K(\pi, n)) = 0$$

また、$m = 0$ ならば、$\pi_n(K(\pi, n)) \cong \pi$ であり、

$$\pi_n(K(\pi, n)) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+1}(\Sigma K(\pi, n)) \xrightarrow{\sigma_*} \pi_{n+1}(K(\pi, n+1))$$

は、$K(\pi, n)$ は $(n-1)$ 連結なので、Frudenthal suspention 定理から、$\Sigma$ は同型になり、Lemma　0.1.8 により、$\sigma_*$ も同型であった。よって、$m = 0$ のとき、$\mathrm{colim}\pi_{m+n}(X \wedge K(\pi, n)) \cong \pi$ である。よって、次元公理を満たす。

ー懸垂公理ー

懸垂準同型

$$\Sigma : \pi_{n+m}(X \wedge K(\pi, n)) \longrightarrow \pi_{n+m+1}(\Sigma X \wedge K(\pi, n+1))$$

を考えたとき、

$$\begin{tikzcd}
{[S^{n+m}, X \wedge \Omega K(\pi, n+1)]_*} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\Sigma"'] & {[\Sigma S^{n+m}, \Sigma X \wedge \Omega K(\pi, n+1)]_*} \arrow[d, "\Sigma"] \\
{[\Sigma S^{n+m}, X \wedge \Sigma\Omega K(\pi, n+1)]_*} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "(1\wedge\varepsilon)_*"'] & {[\Sigma\Sigma S^{n+m}, \Sigma X \wedge \Sigma\Omega K(\pi, n+1)]_*} \arrow[d, "(1\wedge\varepsilon)_*"] \\
{[\Sigma S^{n+m}, X \wedge K(\pi, n+1)]_*} \arrow[r, "\Sigma"'] & {[\Sigma\Sigma S^{n+m}, \Sigma X \wedge K(\pi, n+1)]_*}
\end{tikzcd}$$

が可換であるため、

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+m}(X \wedge K(\pi,n)) \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d] & \pi_{n+m+1}(\Sigma X \wedge K(\pi,n)) \arrow[d] \\
\pi_{n+m+1}(X \wedge K(\pi,n+1)) \arrow[r, "\Sigma"] & \pi_{n+m+2}(\Sigma X \wedge K(\pi,n+1))
\end{tikzcd}$$

が可換となる。これより、

$$\mathrm{colim}\ \Sigma : \mathrm{colim}_n \pi_{n+m}(X \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \mathrm{colim}_n \pi_{n+m+1}(\Sigma X \wedge K(\pi,n))$$

が誘導できる。これが natural であるのは $\Sigma$ の自然性から導かれる。問題は同型であるかどうかであるが、$X \wedge K(\pi,n)$ が $n-1$ 連結であったから、Frudenthal suspention 定理により、

$$\Sigma : \pi_{n+m}(X \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \pi_{n+m+1}(\Sigma X \wedge K(\pi,n+1))$$

$n+m < 2n-1$ においては同型となる。よって $m < n-1$ で同型となる。よって十分大きな $n$ に対しては、$\Sigma$ は同型になるため colim $\Sigma$ が同型となる。

ー完全性公理ー

$(X,A)$ に対し、$i : A \longrightarrow X$ が cofibration と仮定する。このとき、$X \wedge K(\pi,n)$ , $A \wedge K(\pi,n)$ はともに $n-1$ 連結であるため、projection

$$p : (X \wedge K(\pi,n), A \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow (X \wedge K(\pi,n)/A \wedge K(\pi,n), *) \cong (X/A \wedge K(\pi,n), *)$$

は $2n-1$ 連結となる。これより、

$$p_* : \pi_{n+m}(X \wedge K(\pi,n), A \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \pi_{n+m}(X/A \wedge K(\pi,n))$$

は、$n+m < 2n-1$ のとき、同型となる。つまり、$n$ が十分大きければこれは同型である。ところで、対の homotopy 群の完全列から、

$$\pi_{n+m}(A \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \pi_{n+m}(X \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \pi_{n+m}(X \wedge K(\pi,n), A \wedge K(\pi,n))$$

の完全列が存在し、colimit を取ったところで完全性は失われないため、

$$\mathrm{colim}\pi_*(A \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \mathrm{colim}\pi_*(X \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \mathrm{colim}\pi_*(X \wedge K(\pi,n), A \wedge K(\pi,n))$$

が完全である。これより、

$$\mathrm{colim}\pi_{n+m}(A\wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \mathrm{colim}\pi_{n+m}(X\wedge K(\pi,n)) \longrightarrow \mathrm{colim}\pi_{n+m}(X/A\wedge K(\pi,n),*)$$

が完全である。

ー加法性定理ー

面倒なのでまず、二つの空間の wedge に対し定理を示してみる。

$$(X_1 \vee X_2) \wedge K(\pi,n) \cong (X_1 \wedge K(\pi,n)) \vee (X_2 \wedge K(\pi,n))$$

ここで、$(X_1\wedge K(\pi,n))\times(X_2\wedge K(\pi,n))$ の $2n-1$skelton を考えてみると、$X_i\wedge K(\pi,n)$ はともに、$n-1$ 連結であるため、$(X_1 \wedge K(\pi,n)) \vee (X_2 \wedge K(\pi,n))$ の $2n-1$skelton と一致する。よって、胞体近似定理を用いれば、$k \leqq 2n-1$ に対し、

$$\pi_k((X_1 \wedge K(\pi,n)) \times (X_2 \wedge K(\pi,n), (X_1 \wedge K(\pi,n)) \vee (X_2 \wedge K(\pi,n)) = 0$$

であるため、homotopy 群の完全列から、inclusion

$$(X_1 \wedge K(\pi,n)) \vee (X_2 \wedge K(\pi,n)) \longrightarrow (X_1 \wedge K(\pi,n)) \times (X_2 \wedge K(\pi,n))$$

が $2n-1$equivalence となる。ところで、

$$\pi_*(X_1 \wedge K(\pi,n)) \times (X_2 \wedge K(\pi,n)) \cong \pi_*(X_1 \wedge K(\pi,n)) \oplus \pi_*(X_2 \wedge K(\pi,n))$$

であるため、今までと同様の議論から、

$$\begin{aligned}&\mathrm{colim}\pi_{n+m}(X_1 \wedge K(\pi,n)) \vee (X_2 \wedge K(\pi,n))\\ &\cong \mathrm{colim}\pi_{n+m}(X_1 \wedge K(\pi,n)) \oplus \mathrm{colim}\pi_{n+m}(X_2 \wedge K(\pi,n))\end{aligned}$$

以下これは有限まで議論を拡張できるが、無限の議論を行うためには、
$\pi_{n+m}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda \wedge K(\pi,n))$ の代表元 $[f]$ において、$S^{n+m}$ が compact であるから、$f(S^{n+m}) \subset \bigvee_{i=1}^{k} X_i \wedge K(\pi,n)$ となる有限個の $X_1, X_2, \cdots X_k$ が存在する。こうして有限の議論に帰着させられるはずである。

ーホモトピー公理ー

$f, g : X \longrightarrow Y$ において、$f \simeq g$ とする。このとき、

$$f \wedge 1 \simeq g \wedge 1 : X \wedge K(\pi,n) \longrightarrow Y \wedge K(\pi,n))$$

であるため、$(f \wedge 1)_* = (g \wedge 1)_*$

$\square$