関手の随伴

関手の随伴の概念は同値よりも若干弱いが、その分よく現れる概念である。

1 圏の同値

互いに逆向きの関手があったとき、合成して恒等関手になるという定義で、同型という概念は定義できる。しかし、実際に良く扱うのはそれよりも弱い同値という概念である。

定義 1.1. 2つの関手 $F, G : C \longrightarrow D$ の間の自然変換 $t : F \longrightarrow G$ が同型であるとは、任意の C の対象 X に対し、$t_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ が同型であることを意味する。このような t が存在するとき、F, G は同型であるといい、$F \cong G$ とかく。

$F : C \longrightarrow D$ が圏の同値であるとは、$G : D \longrightarrow C$ が存在し、$F \circ G \cong 1_D$, $G \circ F \cong 1_C$ を満たすことである。

例 1.2. $C = *$ という1つの対象と恒等射のみからなる圏とする。そして D を $D_0 = \{a, b\}$, $D(a, b) = D(b, a) = *$ が一点からなる圏とする。$D \longrightarrow C$ を射影とすると、これは同値である。

圏の同値よりもさらに弱い概念として、関手の随伴というものがある。

定義 1.3.

関手 $F : C \longrightarrow D, \quad G : D \longrightarrow C$ に対し、F が G の左随伴（G が F の右随伴）であるとは、任意の C の対象 X と D の対象 Y に対し、

$$\alpha_{X,Y} : C(X, GY) \longrightarrow D(FX, Y)$$

という自然な同型が存在する場合である。つまり、$f : X' \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y'$ というそれぞれの射に対し、

$$\begin{tikzcd} C(X, GY) \arrow[r, "\alpha_{X,Y}"] \arrow[d, "{(f^*, Gg_*)}"'] & D(FX, Y) \arrow[d, "{(Ff^*, g_*)}"] \\ C(X', GY') \arrow[r, "\alpha_{X',Y'}"'] & D(FX', Y') \end{tikzcd}$$

が可換である。このとき、$F : C \Longleftrightarrow D : G$ と書く。

例 1.4. 関手の随伴の例を挙げる。

1. S を集合としたとき、$\mathbb{Z}S$ を S から生成される自由アーベル群とする。また、アーベル群 G に対し、$\sharp G$ を群構造を忘れた集合とする。このとき、

$$\mathbb{Z} : \mathbf{Sets} \Longleftrightarrow \mathbf{Abel} : \sharp$$

である。

2. S を集合としたとき、$\mathrm{Dis}(S)$ を離散位相を入れた空間とする。このとき、

$$\mathrm{Dis} : \mathbf{Sets} \Longleftrightarrow \mathbf{Spaces} : \sharp$$

である。ただし、$\sharp X$ は位相構造を忘れた集合である。

3. S を集合としたとき、$\mathrm{Ind}(S)$ を密着位相を入れた空間とする。このとき、

$$\sharp : \mathbf{Spaces} \Longleftrightarrow \mathbf{Sets} : \mathrm{Ind}$$

である。

4. 空間 X に対し、$S(X)$ を X の特異単体集合とする。逆に単体集合 Σ に対し、$|\Sigma|$ をその幾何学的実現とする。このとき、

$$|-| : \mathbf{Sets}^{\Delta^{op}} \Longleftrightarrow \mathbf{Spaces} : S$$

である。

定義 1.5. 随伴関手 $F : C \Longleftrightarrow D : G$ において、C の対象 X に対し、$\alpha_{X,FX} : C(X, DFX) \longrightarrow D(FX, FX)$ を考える。$\alpha_{X,FX}(\eta) = 1_{FX}$ となる $\eta : X \longrightarrow GFX$ を X 単位射とよぶ。逆に、D の対象 Y に対し、$\alpha_{GY,Y} : C(GY, GY) \longrightarrow D(FGY, Y)$ を考えたとき、$\varepsilon = \alpha_{GY,Y}(1_{GY}) : FGY \longrightarrow Y$ を Y の余単位射と呼ぶ。

次は随伴の一意性を示したものである。

命題 1.6. $F : C \Longleftrightarrow D$ に対し、G, H をその右（左）随伴とする。このとき、G, G' は同型である。

証明 D の対象 Y に対し、自然変換 $t_Y : GY \longrightarrow G'Y$ を次で定義する。(F, G') が随伴であるから、

$$\alpha_{GY,Y} : C(FGY, Y) \longrightarrow D(GY, G'Y)$$

を考え、$t_Y = \alpha_{GY,Y}(\varepsilon)$ で定義する。逆に、(F, G) が随伴であるから、

$$\alpha_{G'Y,Y} : C(FG'Y, Y) \longrightarrow D(G'Y, GY)$$

を用いれば、$\alpha_{G'Y,Y}(\varepsilon') : G'Y \longrightarrow GY$ が逆射である。 □

関手の随伴は単位射と余単位射によって特徴づけられる。それはモナドという概念でも説明される。

2 モナド

モナドという概念は数学以外にもあるようであるが、ここでは圏論的な見地から説明する。

定義 2.1. C を圏としたとき、C 上のモナドとは、(T, η, μ) という関手 $T : C \longrightarrow C$ と 2 つの自然変換、$\eta : 1_C \longrightarrow T$ と、$\mu : T^2 \longrightarrow T$ から構成され、以下の条件を満たす。

1. （結合則） $\mu \circ T(\mu) = \mu(T) \circ \mu : T^3 \longrightarrow T$
2. （単位元） $\mu \circ T(\eta) = \mu \circ \eta(T) = 1_T$

注意 2.2. 一言で述べるならば、C 上のモナドとは、$\mathrm{End}(C)$ という C 上の関手からなる圏において、関手の合成でモノイド構造を入れたときのモノイドである。

矢印を逆にすればコモナドの定義ができる。

定義 2.3. D を圏としたとき、D 上のコモナドとは、(T, θ, ν) という関手 $T : C \longrightarrow C$ と 2 つの自然変換、$\theta : T \longrightarrow 1_C$ と、$\nu : T \longrightarrow T^2$ から構成され、以下の条件を満たす。

1. （結合則） $\nu \circ T(\nu) = \nu(T) \circ \nu : T \longrightarrow T^3$
2. （単位元） $T(\theta) \circ \nu = \theta(T) \circ \nu = 1_T$

例 2.4. 随伴関手 $F : C \Longleftrightarrow D : G$ において、$G \circ F : C \longrightarrow C$ を考える。$\eta : 1_C \longrightarrow T$ は単位射、$G\varepsilon F : GFGF \longrightarrow GF$ という自然変換を考えると $(G \circ F, \eta, G\varepsilon F)$ は C 上のモナドである。逆に、$(F \circ G, \varepsilon, F\eta G)$ は D 上のコモナドである。

逆に関手の随伴は（コ）モナドによって特徴づけられる。

命題 2.5. $F : C \longrightarrow D$, $G : D \longrightarrow C$ を関手とする。$(G \circ F, \eta, \mu)$ というモナド、そして $(F \circ G, \theta, \nu)$ というコモナドが存在すれば、$F : C \Longleftrightarrow D : G$ である。

証明 $C(X, GY) \longrightarrow D(FX, Y)$ を、$f : X \longrightarrow GY$ に対し、

$$FX \xrightarrow{Ff} FGY \xrightarrow{\theta} Y$$

の合成を対応させる。逆に $D(FX, Y) \longrightarrow C(X, GY)$ の対応を、$g : FX \longrightarrow Y$ に対し、

$$X \xrightarrow{\varepsilon} GFX \xrightarrow{Gg} GY$$

によって与える。

□