圏・関手・自然変換

今までは各々の空間の情報を個別に調べてきたが、すべての空間をひとまとめにした枠組みを考えると、ホモトピー論の話が理解しやすいし、議論の展開が広がってくる。

1　圏

幾何学では位相空間、代数では群・環・体などの代数的対象を扱う。その際、２つの対象を対比するのに用いるのが写像である。位相空間ならば連続写像、代数的な対象なら準同型写像がそれに当たる。このように調べたい対象と、そして２つの対象の間の関係を示した射が指定された枠組みが「圏」と呼ばれるものである。

定義 1.1. 圏 C とは以下の情報からなる。

1. １つの族 C_0、この元を C の対象とよぶ。
2. 各 $X, Y \in C_0$ に対して与えられる集合 $C(X, Y)$、この元を X から Y への射と呼び、$f : X \longrightarrow Y$ と書く。
3. 写像 $\circ : C(Y, Z) \times C(X, Y) \longrightarrow C(X, Y)$, $(g, f) \mapsto g \circ f$、これを合成と呼ぶ。また、この合成に関して次の２つの条件を満たす。
   (a) 結合法則、つまり、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ を満たす。
   (b) 恒等射の存在、つまり、任意の $X \in C_0$ に対し、$1_X \in C(X, X)$ が存在し、$g \circ 1_X = g$, $1_X \circ f = f$ が任意の $g \in C(X, Y)$, $f \in C(Z, X)$ について成り立つ。

注意 1.2. 各対象 X について、恒等射 $1_X \in C(X.X)$ は一意に決まる。

証明 $1_X, 1'_X \in C(X, X)$ を恒等射とすると、$1_X = 1_X \circ 1'_X = 1'_X$ である。 □

次は集合においては全単射、位相空間ならば同相、群ならば同型に当たる概念である。

定義 1.3. 圏 C の射 $f \in C(X, Y)$ に対し、$g \in C(Y, X)$ で、$g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ を満たすものを f の逆射と呼び、このような射が存在するとき f は同型射と呼ぶ。さらにこのとき、X と Y は同型という。

例 1.4. 圏の例をいくつか紹介する。

- **Set** : 集合と写像からなる圏
- **Space** : 空間と連続写像からなる圏
- **Grp** : 群と準同型からなる圏
- **Ch** : chain complex と chain map からなる圏

また、与えられた圏から新たな圏を作る方法もある。

定義 1.5. C を圏としたとき、圏 D が C の部分圏であるとは、族として $D_0 \subset C_0$ であり、任意の D の対象 X, Y に対し、$D(X, Y) \subset C(X, Y)$ が成り立ち、さらに D の合成が C の合成の制限で与えられていることをさす。また、D が充満部分圏とは $D(X, Y) = C(X, Y)$ のことを意味する。

定義 1.6. C, D をともに圏とする。このとき、圏 $C\times D$ を以下のように定義する。$(C\times D)_0$ は C の対象 X と D の対象 Y の組 (X,Y) からなる族。また、

$$(C\times D)\left((X,Y),(Z,W)\right)=C(X,Z)\times D(Y,W)$$

で与え、合成はそれぞれの合成の積 $\circ_C\times\circ_D$ で与える。これを C と D の直積と呼ぶ。

定義 1.7. C を圏としたとき、圏 C^{op} を以下のように定義する。$C_0^{op}=C_0$ とし、$C^{op}(X,Y)=C(Y,X)$ とする。このとき、合成は

$$C^{op}(Y,Z)\times C^{op}(X,Y)=C(Z,Y)\times C(Y,X)\cong C(Y,X)\times C(Z,Y)\xrightarrow{\circ}C(Z,X)=C^{op}(X,Z)$$

と C の合成を用いて定義する。これを C の逆圏と呼ぶ。逆圏とは C の射の方向を入れ替えた圏と考えることができる。明らかに、$(C^{op})^{op}=C$ となる。

圏 C において、ある対象 X を固定し、そこへの、あるいはそこからの射全体を考えると新たな圏を構成できる。これは基点つき空間や、「fiberwise」なトポロジーやホモトピーを考える上でも必要な世界である。

定義 1.8. C を圏、X をその対象とする。このとき、圏 $C\downarrow X$ を以下で定義する。

$$(C\downarrow X)_0=\{f:Y\longrightarrow X\mid Y\in C_0\}$$

とし、X への射を対象、そして 2 つの対象 $f:Y\longrightarrow X$, $g:Z\longrightarrow X$ に対し、

$$(C\downarrow X)(f,g)=\{h\in C(Y,Z)\mid g\circ h=f\}$$

により定義する。合成は C の合成で与えられる。
双対的に $X\downarrow C$ が、

$$(X\downarrow C)_0=\{f:X\longrightarrow Y\mid Y\in C_0\}$$

によって定義される。

例 1.9. 位相空間の圏 **Space** において、その対象で一点空間を $*$ と書く。このとき、

$$\mathbf{Space}_*=*\downarrow\mathbf{Space}$$

とかく。これは基点つき空間の圏である。

圏には重要な対象として始対象と終対象を備えているものが多い。この二つの対象は非常に重要である。

定義 1.10. 圏 C において、

1. 対象 ϕ が始対象であるとは、任意の対象 X に対し、$C(\phi,X)$ が一点集合であること、つまり ϕ からの射が 1 つしかないことを意味する。

2. 対象 $*$ が終対象であるとは、任意の対象 X に対し、$C(X,*)$ が一点集合であること、つまり $*$ への射が 1 つしかないことを意味する。

例 1.11.

1. **Space** において、空集合 ϕ は始対象、一点空間 $*$ は終対象である。

2. **Grp** において、自明な群 $\{e\}$ は始対象である終対象である。

3. $C\downarrow X$ において、恒等射 1_X は終対象であり、$X\downarrow C$ においては始対象である。

2 関手

対象と対象の関係を記述するのが写像であるなら、圏と圏の関係を記述するのは関手と呼ばれるものである。

定義 2.1. 圏 C, D が与えられたとき、C から D への共変関手 F とは、次の２つからなる。

1. 族の間の対応、$F : C_0 \longrightarrow D_0$、
2. 射の集合の間の写像、$F : C(X,Y) \longrightarrow D(FX,FY)$, $f \mapsto Ff$、

   混乱するかもしれないが、両方とも同じ F を用いる。そしてこれが次の二つの条件を満たす。

   (a) 恒等射を保つ。つまり、$F(1_X)) = 1_{FX}$ である。

   (b) 合成を保つ。つまり、$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である。

注意 2.2. 反変関手 $F : C \longrightarrow D$ というものもある。

1. 族の間の対応、$F : C_0 \longrightarrow D_0$、
2. 射の集合の間の写像、$F : C(X,Y) \longrightarrow D(FY,FX)$, $f \mapsto Ff$、

で恒等射と合成を保つものである。つまり、行った先で射の向きが変わるものである。しかしこれは、共変関手 $C^{op} \longrightarrow D$ と考えることができる。よって、共変・反変を区別せず単に関手と述べる。

例 2.3. 今まで扱ってきた関手の例を述べる。

1. 特異 chain complex を対応させる $C : \mathbf{Space} \longrightarrow \mathbf{Ch}$ は関手である。
2. ホモロジー群を対応させる $H_* : \mathbf{Ch} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ は関手である。
3. 被約ホモロジー群を対応させる $\widetilde{H}_* : \mathbf{Space}_* \longrightarrow \mathbf{Grp}$ は関手である。
4. 自由アーベル群を対応させる $\mathbb{Z} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ は関手である。

また、次のような関手も重要である。

例 2.4.

1. 圏 C において、$1_C : C \longrightarrow C$ は対象をそのまま対応させ、射の対応も恒等写像で与える。これを恒等関手と呼ぶ。
2. 圏 C, D において、D の対象 X を一つ定める。$\Delta_X : C \longrightarrow D$ は、C のすべての対象を X へ対応させ、すべての射も X の恒等射へ対応させる。これを X 上の定値関手と呼び、Δ_X とよぶ。
3. C を圏としたとき、射の集合をとるというというのは関手、$C(-,-) : C^{op} \times C \longrightarrow \mathbf{Set}$ を与える。

注意 2.5. F が圏 C から D への関手のとき、D の同型射 f に対し、$F(f)$ は C の同型射である。

3 自然変換

２つの空間の間を繋ぐのが写像、そして２つの写像の間を繋ぐのがホモトピーであった。２つの圏の間を繋ぐのが関手なら、２つの間の関手を繋ぐのが自然変換である。

定義 3.1. $F, G : D \longrightarrow C$ を２つの関手とする。このとき、

$$\alpha = \{\alpha_X : F(X) \longrightarrow G(X) \mid X \in D_0\}$$

が自然変換とは、任意の D の射 $f: X \longrightarrow Y$ に対し次が可換となる。

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "Gf"'] & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

このとき、$\alpha: F \Longrightarrow G$ とかく。

上の書き方からもわかる通り、自然変換とは、関手の間の射である。しかし、関手を対象として、自然変換を射としても一般的には圏にはならない。それは自然変換は定義域の対象に左右され、膨大な数存在して集合になる保証が無いからである。よって、定義域の対象の族が集合ならばよい。

定義 3.2. 圏 D の対象の族 D_0 が集合であるとき、D を小圏と呼ぶ。

小圏 D は対象や射が少なく、合成の関係が安易な場合には点と矢印を用いた図で表せる。対象が 2 点 $\{X, Y\}$, $D(Y, X) = \phi$, $D(X, Y) = D(X, X) = D(Y, Y) = *$ の場合には、$\cdot \longrightarrow \cdot$ と表せる。このとき、関手 $F: D \longrightarrow C$ は C の射を表している。このように、ある圏での図式は関手として捉えることができる。よく出てくる四角形の図式は、４つの対象と４本の射からなる小圏からの関手である。この考えは図式の押し出し、引き戻し、（コ）ファイバーなどはすべて関手としての（余）極限で表せることなどにつながる。

定義 3.3. D を小圏としたとき、任意の圏 C に対し、C^D を D から C への関手全体、自然変換を射とし、合成は各成分ごとの射の合成により定義すると圏となる。これを関手圏と呼ぶ。

例 3.4. D を小圏、C を圏とする。このとき、$\Delta: C \longrightarrow C^D$ を、$X \mapsto \Delta(X)$ とする。ただし、$\Delta(X)$ は X 上の定値関手とする。また $f: X \longrightarrow Y$、$d \in D_0$ に対し、$\Delta(f)(d) = f$ とすれば、これは関手である。