（余）極限

（余）極限の考えは数学には欠かせない。無限の概念はイメージではなんとなく理解できるものの、厳密な定義となると難しい。圏論における（余）極限では一意的な射の存在を定義にする。

1　余極限

まずは余極限のほうの定義と性質を簡単に述べる。極限はその双対ということで同じように示せる。

定義 1.1. 小圏 D, 圏 C、関手 $F : D \longrightarrow C$ において、F の余極限 $\mathrm{colim}F \in C_0$ とは、自然変換 $i : F \longrightarrow \Delta(\mathrm{colim}(F))$ がともに与えられ次を満たす。任意の $X \in C_0$ と自然変換 $t : F \longrightarrow \Delta(X)$ に対し、C の射 $s : \mathrm{colim}(F) \longrightarrow X$ で、$\Delta(s) \circ i = t$ を満たすものが一意に存在することである。

$$\begin{tikzcd}
F(d) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & F(d') \arrow[dl, "i"'] \arrow[ddl, bend left, "t"] \\
& \mathrm{colim}F \arrow[d, dotted, "s"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

また、任意の小圏からの関手に対し、余極限が存在するとき、C は余極限で閉じているという。

命題 1.2. 集合の圏 **Sets** は余極限で閉じている。

証明 $F : D \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対し、

$$\mathrm{colim}(F) = \coprod_{d \in D_0} F(d) / \sim$$

により定義する。ただし、$x \in F(a),\ y \in F(b)$ に対し、$x \sim y$ とは、$z \in F(c),\ f : c \longrightarrow a,\ g : c \longrightarrow b$ が存在し、$F(f)(z) = x,\ F(g)(z) = y$ となると定義する。このとき、自然変換 $i : F \longrightarrow \Delta(\mathrm{colim}F)$ は包含写像により与えられる。今、任意の集合 X と自然変換 $t : F \longrightarrow \Delta(X)$ が与えられたとすると、$s : \mathrm{colim}F \longrightarrow X$ が

$$\coprod_{d \in D_0} t_d : \coprod_{d \in D_0} F(d) \longrightarrow X$$

から誘導され、$s \circ i_d = t_d$ を満たし、一意的に存在する。 □

系 1.3. 位相空間の圏は余極限で閉じている。これは命題 1.2 において直和位相と商位相によって余極限の空間が構成できる。

系 1.4. アーベル群の圏は余極限で閉じている。これは命題 1.2 において直和とイメージの部分群による商群によって余極限のアーベル群が構成できる。

定義 1.5. 小圏 D は、恒等射以外射を持たない小圏（集合）とする。関手 $F : D \longrightarrow C$ に対し、$\mathrm{colim}(F)$ が存在するとき、これを $\{X_d\}_{d \in D_0}$ の直和とよび、$\coprod_{d \in D_0} X_d$ とかく。

定義 1.6. $D = \{b \longleftarrow a \longrightarrow c\}$ という小圏とする。つまり、3つの対象とそれぞれを繋ぐ2本の射と恒等射のみからなる圏とする。関手 $F : D \longrightarrow C$ に対し、$\mathrm{colim}(F)$ が存在するとき、これを C における $F(b) \longleftarrow F(a) \longrightarrow F(c)$ の押し出しとよび、$F(b) \cup_{F(a)} F(c)$ とかいたりする。

注意 1.7. 押し出し図式では次の図式

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r] \arrow[d] & F(b) \arrow[d] \\ F(c) \arrow[r] & F(b) \cup_{F(a)} F(c) \end{tikzcd}$$

が可換であり、ある種の一意性を持つものである。それは、

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r] \arrow[d] & F(b) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ F(c) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "g"'] & F(b) \cup_{F(a)} F(c) \arrow[dr, dotted, "f\cup g"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

任意の空間 X に対し、外側の図式を可換にすると、$F(b) \cup_{F(a)} F(c) \longrightarrow X$ で図式を可換にするものが一意に存在するものである。

空間などでのイメージとしては $F(b)$ と $F(c)$ を $F(a)$ で張り合わせた空間である。

例 1.8. $D^n \longleftarrow S^{n-1} \longrightarrow D^n$ で写像はそれぞれ境界への包含写像とする。この図式の押し出し、$D^n \cup_{S^{n-1}} D^n \cong S^n$ である。

もうひとつ重要なのが、コイコライザーの図式である。

定義 1.9. $D = \{a \rightrightarrows b\}$ という小圏とする。つまり、2つの対象と2本の平行した射と恒等射のみからなる圏とする。関手 $F : D \longrightarrow C$ に対し、$\mathrm{colim}(F)$ が存在するとき、これを C における $F(a) \rightrightarrows F(b)$ のコイコライザーとよぶ。

余極限の存在は、直和とコイコライザーの存在で保証される。

命題 1.10. 圏 C が余極限で閉じていることと、任意の直和とコイコライザーが存在することは同値である。

証明 余極限で閉じていれば、直和と押し出しが存在することは当然である。逆に任意の小圏 D と関手 $F : D \longrightarrow C$ に対し、まず直和 $\coprod_{d \in D_0} F(d)$ を考える。次に、

$$\coprod_{f:d \longrightarrow e} F(d) \rightrightarrows \coprod_{d \in D_0} F(d) \longrightarrow \mathrm{colim} F$$

の図式でコイコライザーを考えれば、F の余極限を得る。ただし、$\rightrightarrows$ の1つは恒等射から誘導され、もう1つは $F(f) : F(d) \longrightarrow F(e)$ により得られる射である。 □

定義 1.11. D を小圏とし、C を余極限で閉じた圏とする。$F, G : D \longrightarrow C$ を関手とし、$t : F \longrightarrow G$ をその間の自然変換とする。このとき、$i : F \longrightarrow \mathrm{colim} F$, $j : G \longrightarrow \mathrm{colim} G$ をそれぞれ余極限に付随する自然変換とする。このとき、$s : \mathrm{colim} F \longrightarrow \mathrm{colim} G$ という射で、$\Delta(s) \circ i = j \circ t$ を満たすものが一意に存在する。このことは、C^D を D から C への関手のなす圏としたとき、

$$\mathrm{colim} : C^D \longrightarrow C$$

という関手が与えられたことを意味する。

命題 1.12. C は任意の余極限に対して閉じているとする。このとき、小圏 D に対し、

$$\mathrm{colim} : C^D \Longleftrightarrow C : \Delta$$

という随伴になっている。

証明 $F \in C_0^D$, $X \in C_0$ に対し、

$$\alpha_{F,X} : C(\mathrm{colim}F, X) \longrightarrow C^D(F, \Delta(X))$$

を次で定義する。$f \in C(\mathrm{colim}F, X)$ に対し、自然変換 $\alpha(f)_d = f \circ i_d : F(d) \longrightarrow X$ により定義する。これが全射であるのは、余極限の定義であり、単射であるのが一意的な存在である。 $\square$

定義 1.13. C, C' を余極限で閉じた圏とし、$F : C \longrightarrow C'$ を関手とする。このとき小圏 D、$X : D \longrightarrow C$ において、$i : X \longrightarrow \Delta(\mathrm{colim}X)$, $j : FX \longrightarrow \Delta(\mathrm{colim}FX)$ をそれぞれ余極限に付随する自然変換とする。$Fi : FX \longrightarrow \Delta(F(\mathrm{colim}X))$ から、余極限の性質から

$$s : \mathrm{colim}FX \longrightarrow F(\mathrm{colim}X)$$

で、$\Delta(s) \circ j = Fi$ が誘導される。F が余極限を保つとは、s が同型射であることである。

定理 1.14. $F : C \Longleftrightarrow C' : G$ であれば、F は余極限を保つ。

証明 D を小圏とし、命題 1.12 により、$\mathrm{colim} : C^D \Longleftrightarrow C : \Delta$ であった。また、$F : C \Longleftrightarrow C' : G$ より、

$$F\mathrm{colim} : C^D \Longleftrightarrow C' : \Delta G = \Delta$$

である。一方、(F, G) から誘導される関手として、$F_* : C^D \Longleftrightarrow C'^D : G_*$ であるため、

$$\mathrm{colim}F_* : C^D \Longleftrightarrow C' : G_*\Delta = \Delta$$

である。よって、随伴の一意性から、$\mathrm{colim}F_* \cong F\mathrm{colim}$ である。よって任意の $X : D \longrightarrow C$ に対し、

$$\mathrm{colim}F_*(X) = \mathrm{colim}FX \cong F(\mathrm{colim}X)$$

である。 $\square$

位相空間での余極限、特に押し出しとコファイブレーションとは密接に関わっている。

命題 1.15.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "g"'] & B \cup_A X
\end{tikzcd}$$

を押し出し図式とする。$i : A \longrightarrow X$ がコファイブレーションなら、$j : B \longrightarrow B \cup_A X$ もコファイブレーションである。

証明 任意の空間 Y に対し、次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
B \cup_A X \arrow[ur, "h"] \arrow[rr] & & (B \cup_A X) \times I
\end{tikzcd}$$

ただし、$(B \cup_A X) \times I \cong (B \times I) \cup_{A \times I} (X \times I)$ であることは、

$$- \times I : \mathbf{Spaces} \Longleftrightarrow \mathbf{Spaces} : \mathrm{Map}(I, -)$$

であることと定理 2.12 から従う。このとき、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "H\circ(f\times 1_I)"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "h\circ g"] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}$$

の可換図から、i がコファイブレーションであることから、$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow Y$ を得る。このとき、押し出しの性質から、

$$\widetilde{H} \cup H : (B \cup_A X) \times I \longrightarrow Y$$

で、H の持ち上げを得る。 $\square$

2 極限

余極限に現れてきた図式をすべて反転させて議論のすると、極限の概念が生まれる。定理や命題の証明はほぼ同じなので省略する。

定義 2.1. 小圏 D, 圏 C、関手 $F : D \longrightarrow C$ において、F の極限 $\mathrm{lim}F \in C_0$ とは、自然変換 $p : \Delta(\mathrm{lim}F) \longrightarrow F$ がともに与えられ次を満たす。任意の $X \in C_0$ と自然変換 $t : \Delta(X) \longrightarrow X$ に対し、C の射 $s : X \longrightarrow \mathrm{colim}(F)$ で、$p \circ \Delta(s) = t$ を満たすものが一意に存在することである。

$$\begin{tikzcd}
F(d) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(d') \\
& \mathrm{lim}F \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "p"'] & \\
& X \arrow[uul, bend left, "t"] \arrow[uur, bend right, "t"'] \arrow[u, dotted, "s"] &
\end{tikzcd}$$

また、任意の小圏からの関手に対し、極限が存在するとき、C は極限で閉じているという。

命題 2.2. 集合の圏 **Sets** は極限で閉じている。

証明 $F : D \longrightarrow \mathbf{Sets}$ に対し、

$$\mathrm{lim}(F) = \left\{ x \in \prod_{d \in D_0} F(d) \mid F(f) \circ p_d(x) = F(g) \circ p_{d'}(x), {}^{\forall} f : d \longrightarrow e, g : d' \longrightarrow e \right\}$$

という部分集合で定義する。ただし、$p_d, p_{d'}$ はそれぞれの成分への射影である。このとき、自然変換 $p : \Delta(\mathrm{lim}F) \longrightarrow F$ は各成分への射影で与えられる。今、任意の集合 X と自然変換 $t : \Delta(X) \longrightarrow F$ が与えられたとすると、$s : X \longrightarrow \mathrm{colim}F$ が

$$\prod_{d \in D_0} t_d : X \longrightarrow \prod_{d \in D_0} F(d)$$

から誘導され、$p_d \circ s = t_d$ を満たし、一意的に存在する。 $\square$

系 2.3. 位相空間の圏は極限で閉じている。これは命題 2.2 において直積位相と部分位相によって極限の空間が構成できる。

系 2.4. アーベル群の圏は極限で閉じている。これは命題 2.2 において直積の部分群によって極限のアーベル群が構成できる。

定義 2.5. 小圏 D は、恒等射以外射を持たない小圏（集合）とする。関手 $F : D \longrightarrow C$ に対し、$\lim(F)$ が存在するとき、これを $\{X_d\}_{d\in D_0}$ の直積とよび、$\prod_{d\in D_0} X_d$ とかく。

定義 2.6. $D = \{b \longrightarrow a \longleftarrow c\}$ という小圏とする。つまり、３つの対象とそれぞれを繋ぐ２本の射と恒等射のみからなる圏とする。関手 $F : D \longrightarrow C$ に対し、$\mathrm{colim}(F)$ が存在するとき、これを C における $F(b) \longrightarrow F(a) \longleftarrow F(c)$ の引き戻しとよび、$F(b) \times_{F(a)} F(c)$ とかいたりする。

これは被覆空間、ファイバー束、ファイブレーションでも登場した概念である。もうひとつ重要なのが、イコライザーの図式である。

定義 2.7. $D = \{a \rightrightarrows b\}$ という小圏とする。つまり、２つの対象と２本の平行した射と恒等射のみからなる圏とする。関手 $F : D \longrightarrow C$ に対し、$\lim(F)$ が存在するとき、これを C における $F(a) \rightrightarrows F(b)$ のイコライザーとよぶ。

極限の存在は、直積とイコライザーの存在で保証される。

命題 2.8. 圏 C が余極限で閉じていることと、任意の直積とイコライザーが存在することは同値である。

定義 2.9. D を小圏とし、C を余極限で閉じた圏とする。$F, G : D \longrightarrow C$ を関手とし、$t : F \longrightarrow G$ をその間の自然変換とする。このとき、$p : \mathrm{colim}F \longrightarrow F$, $q : \mathrm{colim}G \longrightarrow G$ をそれぞれ極限に付随する自然変換とする。このとき、$s : \mathrm{colim}F \longrightarrow \mathrm{colim}G$ という射で、$q \circ \Delta(s) \circ i = t \circ p$ を満たすものが一意に存在する。このことは、C^D を D から C への関手のなす圏としたとき、

$$\lim : C^D \longrightarrow C$$

という関手が与えられたことを意味する。

命題 2.10. C は任意の極限に対して閉じているとする。このとき、小圏 D に対し、

$$\Delta : C^D \Longleftrightarrow C : \lim$$

という随伴になっている。

定義 2.11. C, C' を極限で閉じた圏とし、$F : C \longrightarrow C'$ を関手とする。このとき小圏 D、$X : D \longrightarrow C$ において、$p : \Delta(\lim X) \longrightarrow X$, $q : \Delta(\lim FX) \longrightarrow FX$ をそれぞれ余極限に付随する自然変換とする。$Fp : \Delta(F(\lim X)) \longrightarrow FX$ から、極限の性質により

$$s : F(\lim X) \longrightarrow \lim FX$$

で、$q \circ \Delta(s) = Fp$ が誘導される。F が極限を保つとは、s が同型射であることである。

定理 2.12. $F : C \Longleftrightarrow C' : G$ であれば、G は極限を保つ。

命題 2.13.

$$\begin{tikzcd} X \times_B E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

を引き戻し図式とする。$p : A \longrightarrow X$ がファイブレーションなら、$q : X \times_B E \longrightarrow X$ もファイブレーションである。

注意 2.14. 極限と余極限は矢印の向きをひっくり返しただけであるので、C を極限で閉じているとし、$F : D \longrightarrow C$ に対し、$F^{op} : D^{op} \longrightarrow C^{op}$ を考えれば、$\lim F^{op}$ は C^{op} における余極限である。よって、C^{op} は余極限で閉じていることがわかる。