0.1 Monoidal category

Tensor category というのは普通は、Abelian category になっている symmetric monoidal category のことをらしいが参考にした文献では単に tensor product が与えられた category しか書いてなかったのでそのとおりにしてしまった。この意味で tensor category と呼ぶときっと他人には伝わりづらいと思う。ただ普通は monoidal category で議論する事が多いので、一気にそちらを定義してしまった方がいいのかもしれない。

Definition 0.1.1

C を category としたとき、

$$\otimes : C \times C \longrightarrow C$$

である bifunctor と、任意の $X, Y, Z \in \mathrm{ob}(C)$ に対し、natural な isomorphism

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z)$$

が与えられ次の図式を可換にする時、C を tensor category と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[r] \arrow[d] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[dd] \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d] & \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[r] & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

$(\otimes, a)$ を C の tensor stracture と言う。

Example 0.1.2

1. R-module の category は $\otimes_R$ によって Tensor category となる。
2. G を group とする。G を集合とみなし、つまり G の元を object で morphism は恒等射以外ないとして G を category と見なすと group として積により Tensor category となる。

3. C を category としたとき、Func(C, C) は合成により Tensor category となる。

4. C を finite (co)product で閉じた category としたとき、(co)product によって Tensor category である。

Definition 0.1.3

$F : C \longrightarrow D$ を Tensor category 間の fanctor としたとき、natural isomorphism

$$s_{X,Y} : F(X \otimes Y) \xrightarrow{\cong} F(X) \otimes F(Y)$$

が与えられ次の可換図を満たすとき、F を Tensor functor と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd}
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r] \arrow[d] & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d] \\
F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d] & F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[d] \\
(F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[r] & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z))
\end{tikzcd}$$

Example 0.1.4

$| \quad | : \mathbf{SSet} \longrightarrow \mathbf{TOP}$ は Tersor fanctor である。ただし、**SSet** も **TOP** も product によって Tensor category と見なしている。

Definition 0.1.5

C を Tensor category としたとき、$(\otimes, a)$ をその stracture とする。このとき unit object と呼ばれる $S \in \mathrm{ob}(C)$ が与えられ、natural isomorphism

$$l_X : S \otimes X \xrightarrow{\cong} X \quad , \quad r_X : X \otimes S \xrightarrow{\cong} X$$

が与えられ次の条件を満たすとき、C を Monoidal category と呼ぶ。

$$r_S = l_S : S \otimes S \longrightarrow S$$

$$l_X \otimes 1_Y = l_{(X \otimes Y)} : S \otimes X \otimes Y \longrightarrow X \otimes Y$$
$$1 \otimes r_X = r_{(X \otimes Y)} : X \otimes Y \otimes S \longrightarrow X \otimes Y$$
$$1_X \otimes l_Y = r_X \otimes 1_Y : X \otimes S \otimes Y \longrightarrow X \otimes Y$$

$$\begin{tikzcd}
S \otimes X \otimes S \arrow[r, "1_S \otimes r_X"] \arrow[d, "r_X \otimes 1_S"'] & S \otimes X \arrow[d, "l_X"] \\
X \otimes S \arrow[r, "r_X"'] & X
\end{tikzcd}$$

$(\otimes, a, l, r)$ を C の monoidal stracture と呼ぶ。

Definition 0.1.6

C を monoidal category とし、D を catgeory とする。このとき、D が right C-module であるとは、

$$\otimes : D \times C \longrightarrow D$$

である bifanctor と natural isomorphism

$$a_{X,K,L} : (X \otimes K) \otimes L \xrightarrow{\cong} X \otimes (K \otimes_C L)$$

と、C の unit object である $S \in \mathrm{ob}(C)$ に対し、natural isomorphism

$$r_X : X \otimes S \xrightarrow{\cong} X$$

が与えられ、以下の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes S) \otimes K \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes K \arrow[d, "="'] \\
X \otimes (S \otimes_C K) \arrow[r] & X \times K
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes K) \otimes S \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes K \arrow[d, "="'] \\
X \otimes (K \otimes_C S) \arrow[r] & X \times K
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc} (X\otimes S)\otimes S & \longrightarrow & & & X\otimes S \\ \downarrow & & & & \downarrow = \\ X\otimes(S\otimes_C S) & \longrightarrow & X\otimes S & \longrightarrow & X \end{array}$$

$(\otimes, a, r)$ を D の right C-module stracture と呼ぶ。同様に left C-module も定義できる。特に区別せず単に C-module と書くときもある。

Definition 0.1.7

C, D, E を category とする。$C \times D$ から E への adjunction of two variable とは、

$$\otimes : C \times D \longrightarrow E$$

$$\mathrm{Hom}_r : D^{op} \times E \longrightarrow C \quad , \ \mathrm{Hom}_l : C^{op} \times E \longrightarrow D$$

の 3 つの fanctor で、任意の $X \in \mathrm{ob}(D)$ を固定して、

$$(- \otimes X) : C \Longleftrightarrow E : \mathrm{Hom}_r(D, -)$$

さらに、任意の $Y \in \mathrm{ob}(C)$ を固定して、

$$(Y \otimes -) : D \Longleftrightarrow E : \mathrm{Hom}_l(Y, -)$$

が成り立つことである。これを $(\otimes, \mathrm{Hom}_r, \mathrm{Hom}_l)$ とかく。

Definition 0.1.8

C を monoidal category、D を category とする。このとき、D が closed right C-module とは、closed right C-module stracture と呼ばれる $(\otimes, a, r, \mathrm{Hom}_r, \mathrm{Hom}_l)$ が与えられ、$(\otimes, a, r)$ が right C-module stracture であり、$(\otimes, \mathrm{Hom}_r, \mathrm{Hom}_l)$ が $C \times D$ から D への adjunction of two variable であるときのことを言う。