Dold-Thom の定理

ホモロジー理論の例として、ホモトピー群を用いたホモロジー群の構成法を紹介しよう。以下は Dold と Thom による無限対称積のホモトピー群とホモロジー群の関係である。

定義 0.1 (無限対称積)**.** 位相空間 X に対し、その n 乗 X^n には成分を入れ替える操作で n 次対称群 Σ_n が作用している。その群による商空間を

$$\mathrm{SP}^n(X) := X^n/\Sigma_n$$

によって定義する。基点付き空間 $(X,*)$ の場合、最後に基点を挿入する包含射 $X^n \hookrightarrow X^{n+1}$ から、

$$\mathrm{SP}^n(X) \hookrightarrow \mathrm{SP}^{n+1}(X)$$

が誘導される。この n に関する帰納的極限の空間を $\mathrm{SP}^\infty(X)$ で表す。これをすべての成分が基点という点を基点に持つ空間と考える。基点を保つ写像 $f : X \longrightarrow Y$ からは、$f^n : X^n \longrightarrow Y^n$, さらには $\hat{f} : \mathrm{SP}^n(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^n(Y)$ が誘導されるので、SP^n, あるいは SP^∞ は基点付き空間から基点付き空間への関手となる。この空間には次の積（和）構造が定義される。

$$+ : \mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X),\ [x_1,\cdots,x_m]+[y_1,\cdots,y_n] = [x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n]$$

対称群の作用の商空間なので、明らかに可換であり単位元は、基点 $* \in \mathrm{SP}^1(X) = X$ である。これを無限対称積と呼ぶ。

注意 0.2. 無限対称積は一般に連続とは限らない。無限対称積の基になっているのは並べるだけという写像

$$\mathrm{SP}^m(X) \times \mathrm{SP}^n(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^{m+n}(X)$$

であるが、これは明らかに連続である。しかし、無限次元を考えるときに連続性を保持するためには、$\mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(X)$ が、$\bigcup_i \left(\mathrm{SP}^i(X) \times \mathrm{SP}^{n-i}(X)\right)$ に関する弱位相を持っている必要がある。残念ながらこれは一般的に正しくない。ただし、上記ように $+$ を有限次に制限する、あるいはコンパクトな部分空間に制限した場合には連続になっている。

例 0.3. $\mathrm{SP}^n(S^2) \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ である。

証明 $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ という一点コンパクト化した空間とみなし、基点は ∞ とする。このとき、このとき、$\mathrm{SP}^n(S^2)$ の元は、$[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$, $a_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と表せる。今、$a_1,\cdots,a_n$ を根に持つ n-次以下の多項式

$$f(x) = c_n x_n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

が存在する。つまり、$a_i = \infty$ の時はその分だけ次元の下がった多項式を考える。これは、$f(x)$ は定数倍を除いて一意に定まる。このとき、$\mathrm{SP}^n(S^2) \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ を

$$[a_1,\cdots a_n] \mapsto [c_0,c_1,\cdots,c_n] \in C^{n+1} - \{0\}/\lambda x \simeq x$$

で与えれば同相となる。 □

補題 0.4. 2 つのホモトピックな写像 $f \simeq g : X \longrightarrow Y$ に対し、$\hat{f} \simeq \hat{g} : \mathrm{SP}^\infty(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(Y)$ である。

Proof. $H : X \times I \longrightarrow Y$ を f と g をつなぐホモトピーとすると、$H^n : X^n \times I \longrightarrow Y^n$ が、

$$H^n(x_1,\cdots,x_n;t) = (H(x_1,t),\cdots,H(x_n,t))$$

により誘導され、さらにこれが、$\hat{f}$ と $\hat{g}$ をつなぐホモトピー

$$\hat{H} : \mathrm{SP}^\infty(X) \times I \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X)$$

を誘導する。 □

定義 0.5. 2つの基点付き空間 X, Y を考える。写像

$$\rho : \mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(Y) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X \vee Y)$$

を、$\rho([x_1, \cdots, x_m], [y_1, \cdots, y_n]) = [x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n]$ によって定義する。任意の元 $[a_1, \cdots, a_m] \in \mathrm{SP}(X)$ が単位元以外の場合には、基点を含まない形で表示できるので、各 a_i は X か、Y のいずれか一方に属する。よって、ρ は全単射である。

注意 0.6. 上記の ρ は一般に連続とは限らない。したがって $\mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(Y)$ と $\mathrm{SP}^\infty(X \vee Y)$ も同相とは限らない。ただし、無限対称積 + と同様に、$\mathrm{SP}^m(X) \times \mathrm{SP}^n(Y)$ や、コンパクト部分空間に制限する限りでは連続である。特に無限対称積は、折り畳み写像 $X \vee X \longrightarrow X$ と ρ を用いて、

$$\mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(X) \xrightarrow{\rho} \mathrm{SP}^\infty(X \vee X) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X)$$

と書ける。

しかし、ρ の逆写像に関しては面白い結果がある。

命題 0.7. $\rho^{-1} : \mathrm{SP}^\infty(X \vee Y) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(Y)$ は弱ホモトピー同値である。

証明 まず連続性であるが、これに射影を合成すると、

$$\rho^{-1} \circ pr_1 : \mathrm{SP}^\infty(X \vee Y) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(Y) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X)$$

であるが、これは自然なレトラクション $X \vee Y \longrightarrow X$ から誘導される写像と一致しているため連続である。よって、ρ^{-1} も連続となる。この逆写像 ρ もコンパクト部分空間に制限すれば連続になっているため、

$$\rho_*^{-1} : \pi_*(\mathrm{SP}^\infty(X \vee Y)) \longrightarrow \pi_*(\mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(Y))$$

は全単射になる。 □

これは無限個のウェッジ和に対しても同様に示せる。

系 0.8. 弱ホモトピー同値写像

$$\mathrm{SP}^\infty\left(\bigvee_\lambda X_\lambda\right) \longrightarrow \prod_\lambda \mathrm{SP}^\infty(X_\lambda)$$

が存在する。

無限対称積の中でも Dold と Thom が発見したの次の重要な事実である。

定理 0.9 (Dold-Thom の定理)**.** $A \hookrightarrow X$ を閉コファイブレーションとする。このとき、射影 $p : X \longrightarrow X/A$ から誘導される写像

$$\hat{p} : \mathrm{SP}^\infty(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X/A)$$

は準ファイバー空間であり、そのファイバーは $\mathrm{SP}^\infty(A)$ である。

これは SP^∞ というのが、コファイブレーションを準ファイバー空間へ変換させる関手であることを意味している。残念ながらこの証明は難しいため、以下でその概要だけ述べる。まず、準ファイバー空間の性質として、被覆に関する拡張がある。

定義 0.10. 連続写像 $p : E \longrightarrow B$ に対し、部分集合 $U \subset B$ が distinguished であるとは、$U \subset p(E)$ であり、制限

$$p_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U$$

が準ファイバー空間であることをいう。

補題 0.11. 写像 $p : E \longrightarrow B$ で、$B = \bigcup_\lambda U_\lambda$ を開被覆とする。このとき、各 U_λ および、共通部分 $U_\lambda \cap U_\mu$ が distinguished であるならば、p は準ファイバー空間である。

CW 複体などの弱位相によって定義される空間に対しては、もっといいことが言える。

補題 0.12. $p : X \longrightarrow B$ で、$B = \bigcup_i B_i$, $B_i \subset B_{i+1}$ という被覆による弱位相が入っているとする。各 B_i が distinguished ならば、p は準ファイバー空間である。

証明 準ファイバー空間であるためには、$p_* : \pi_*(E, p^{-1}(b)) \longrightarrow \pi_*(B)$ が同型であることを示せばよいが、今、球面から B への連続写像の像はどこからの B_n に属するので、B_n が distinguished であることより示される。 □

証明 (定理 0.9) 概略だけ。これはファイバー束やファイブレーションでも登場した、Dold-Thom 構成法を用いる。おそらくここが由来なのだろう。まず、補題 0.12 により、各有限次での制限

$$\hat{p}_n : \hat{p}^{-1}(\mathrm{SP}^n(X/A)) \longrightarrow \mathrm{SP}^n(X/A)$$

が準ファイバー空間であることを示せばよい。n に関する帰納法を用いる。今、$n = 0$ の時は、$\mathrm{SP}^0(X/A) = *$ なので、$\hat{p}^{-1}(\mathrm{SP}^0(X/A)) = \mathrm{SP}^\infty(A)$ である。これは自明なファイブレーションであるので良い。次に、$n-1$ まで成り立つと仮定する。$V = \mathrm{SP}^n(X/A) - \mathrm{SP}^{n-1}(X/A)$ とおき、$\hat{p}^{-1}(V)$ を考えると、この空間の元は $x_1, \cdots, x_n \in X - A$ と、$y_1, \cdots, y_m \in A$ によって、

$$[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m]$$

と書き表される。

$$\sigma : \hat{p}^{-1}(V) \longrightarrow V \times \mathrm{SP}^\infty(A)$$

が、$\sigma([x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m]) = (\hat{p}[x_1, \cdots, x_n], [y_1, \cdots, y_m])$ により定義される。p の制限 $X - A \longrightarrow X/A - \{*\}$ は全単射なので、σ も全単射である。今までと同様の議論から、σ 及び σ^{-1} はコンパクト部分集合に制限すれば連続である。よって、また $\hat{p}_n$ は σ と自明なファイブレーションの射影 $V \times \mathrm{SP}^\infty(A) \longrightarrow V$ の合成であることから、準ファイバー空間であることがわかる。さて、ここからが有名な手法であるが、今 $\mathrm{SP}^\infty = V \cup \mathrm{SP}^{n-1}(X/A)$ で distinguished な被覆でおおわれている。$\mathrm{SP}^{n-1}(X/A)$ をもう少し膨らませて、開集合にすれば、補題 0.10 が適用できそうである。ここで、コファイブレーションの条件を用いる。閉コファイブレーションは NDR 対と同値であるため、A の変形レトラクトであるような開集合 $A \subset W$ が X の中に存在する。

$$U = \left\{[x_1, \cdots, x_n] \in \mathrm{SP}^\infty(X/A) \mid x_i \in p(W) \subset X/A, 1 \leqq {}^\exists i \leqq n\right\}$$

と定義すると、$p(W)$ が $*$ の変形レトラクトであることから、U は $\mathrm{SP}^{n-1}(X/A)$ の変形レトラクトであることがわかる。よって、$\mathrm{SP}^{n-1}(X/A) \subset U \subset \mathrm{SP}^n(X/A)$ は distinguished な開集合であり、$\mathrm{SP}^n(X/A) = U \cup V$ で、U, V が distinguished、さらに $U \cap V \subset V$ も V と同様に基本的に自明なファイブレーションに帰着できるので distinguished であることが示せる。よって、補題 0.10 が適用され、$\hat{p}$ が準ファイバー空間であることが示された。 □

では、無限対称積のホモトピー群がホモロジー理論となることを示そう。

定理 0.13. 空間 X に対し、$\pi_*(\mathrm{SP}^\infty(X))$ は被約ホモロジー理論である。

証明 示すべきことは次の 5 つの項目である。

1. 次元公理： 例 0.3 により、

$$\pi_n\left(\mathrm{SP}^\infty(S^0)\right) \cong \pi_{n+2}\left(\mathrm{SP}^\infty(\Sigma^2 S^0)\right) \cong \pi_{n+2}\left(\mathrm{SP}^\infty(S^2)\right) \cong \pi_{n+2}\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty\right)$$

このとき、$S^1 \longrightarrow S^\infty \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ が普遍束なのだから、

$$\pi_n\left(\mathrm{SP}^\infty(S^0)\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

2. 完全性公理：今 $A \hookrightarrow X \longrightarrow X/A$ をコファイバー空間とすると、定理 0.9 により、

$$\mathrm{SP}^{\infty}(A) \hookrightarrow \mathrm{SP}^{\infty}(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^{\infty}(X/A)$$

が準ファイバー空間となる。よって、これはホモトピー群の長い完全列を誘導する。

3. 加法性公理：系 0.8 による。

4. ホモトピー公理：補題 0.4 による。

5. 懸垂公理：今、$X \hookrightarrow CX \longrightarrow \Sigma X$ がコファイバー列である。定理 0.9 により、

$$\mathrm{SP}^{\infty}(X) \hookrightarrow \mathrm{SP}^{\infty}(CX) \longrightarrow \mathrm{SP}^{\infty}(\Sigma)$$

が準ファイバー空間である。ここから誘導される長いホモトピー群の完全列を考えると、CX が可縮なので、$\mathrm{SP}^{\infty}(CX)$ も可縮。よって、$\pi_{n+1}(\Sigma X) \cong \pi_n(X)$ という自然な同型が存在する。

□