ホモロジーの公理系

ホモロジー群において特に重要だったのは５つの定理だった。逆にこの５つを公理とした関手をホモロジーと呼ぼうと考案し、そしてその一意性を示したのが Eilenberg-Steenrod である。

1　ホモロジー理論

定義 1.1. E_* を CW 対の圏から次数付きアーベル群への共変関手で、$E_*(X) = E(X, \phi)$ と書き、$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ に対し、$E_*(f) = f_*$ とかく。このとき、$\partial_n : E_n(X, A) \longrightarrow E_{n-1}(A)$ という自然な写像が与えられ、次の５つの条件を満たすとき、ホモロジー理論と呼ぶ。

1. $X = *$ という一点空間のとき、$E_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$
2. 対空間 (X, A) に対し、次は完全列である。
$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$
ただし、i, j は包含写像である。
3. 切除３対 $(X; A, B)$ に対し、包含写像 $i : (A, A \cap B) \longrightarrow (X, B)$ からの誘導、
$$i_* : E_*(A, A \cap B) \longrightarrow E_*(X, B)$$
は同型である。
4. $\{(X_\lambda\ , A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間対の族、$(X, A) = \left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)$ とおく。このとき包含写像から誘導される写像、
$$\sum i_{\lambda *} : \bigoplus E_*(X_\lambda\ ,\ A_\lambda) \longrightarrow E_*(X, A)$$
は同型である。
5. $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ がホモトピックならば、$f_* = g_* : E_*(X, A) \longrightarrow E_*(Y, B)$ である。

この定義を見る限り、明らかに特異ホモロジー群はホモロジー理論です。ただ、特異ホモロジーというのは核になっていたのは、n-単体からの連続写像でしたが、ホモロジー理論にはそんなものはありません。Chain complex とも別次元の話ですので、とても抽象的な概念です。しかし、実はホモロジー群というのはこれだけの情報で決まってしまうというのは驚きです。

補題 1.2. $E_*(X, X) = 0$

証明 完全性公理により

$$E_n(X) \xrightarrow{1} E_n(X) \xrightarrow{j_*} E_n(X, X) \xrightarrow{\partial} E_{n-1}(X) \xrightarrow{1} E_{n-1}(X)$$

恒等射があるので、$\mathrm{Ker}(j_*) = \mathrm{Im}1 = E_n(X)$ より、$j_* = 0$ である。よって、$0 = \mathrm{Im}(j_*) = \mathrm{Ker}\partial$ である。ところで、$\mathrm{Im}\partial = \mathrm{Ker}1 = 0$ よって、$\partial = 0$ である。これより、$E_n(X, X) = \mathrm{Ker}\partial = 0$ である。 □

次の３対の完全列と Mayer-Vietoris 完全列は特異ホモロジーで示したが、本質的には公理系しか用いていないことを確認したい。

命題 1.3. 3 対の空間 (X, A, B) に対し、次は完全列である。

$$\cdots \longrightarrow E_n(A, B) \xrightarrow{i_*} E_n(X, B) \xrightarrow{j_*} E_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} E_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

命題 1.4. 切除 3 対 $(X; A, B)$ に対し、次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow E_n(A \cap B) \xrightarrow{i} E_n(A) \oplus E_n(B) \xrightarrow{j} E_n(X) \xrightarrow{\partial} E_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

対空間とは別に、被約ホモロジー理論もある。

定義 1.5. $\widetilde{E}_*$ が基点付き CW 複体の圏から次数付きアーベル群への共変関手で、次を満たすとき被約ホモロジー理論とよぶ。基点を保つ写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し、$\widetilde{E}_*(f) = f_*$ とかく。

1. $X = S^0$ に対し、$\widetilde{E}_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$
2. $(X, A, x_0$ を基点つき CW 複体対とすると、
$$\widetilde{E}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{E}_n(X) \xrightarrow{p_*} \widetilde{E}_n(X/A)$$
は完全列である。
3. 懸垂同型 $\Sigma : \widetilde{E}_{n-1}(X) \longrightarrow \widetilde{E}_n(\Sigma X)$ とよばれる自然な同型が存在する。
4. $\{(X_\lambda, x_{\lambda_0})\}_{\lambda \in \Lambda}$ を基点付き CW 複体の族、$X = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とおく。包含写像から誘導させる写像、
$$\sum i_{\lambda *} : \bigoplus \widetilde{E}_*(X_\lambda) \longrightarrow \widetilde{E}_*(X)$$
は同型である。
5. $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ はホモトピックならば、$f_* = g_* : \widetilde{E}_*(X) \longrightarrow \widetilde{E}_*(Y)$ である。

次の命題は次元公理と懸垂同型から導かれる。

補題 1.6. $\widetilde{E}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

2 対空間のホモロジーと被約ホモロジー群

定理 2.1. E_* を対空間のホモロジー理論とする。このとき、基点付き CW 複体 (X, x_0) に対し、$\widetilde{E}_*(X) = E_*(X, x_0)$ とすれば、これは被約ホモロジー理論である。

証明 次元定理に関しては、$(S^0, 1)$ の長い完全列を計算することにより示される。完全性については、写像錐を用いて、$(C_i, CA) \simeq (X/A, *)$ であったこと、そして、$(C_i; X, CA)$ が切除 3 対なので、$E(X, A)_* \cong E_*(C_i, CA)$ である。これらと、(X, A, x_0) の 3 対のホモロジー完全列を用いれば示される。残りについては特異ホモロジーの場合と同様に示される。 □

逆に被約ホモロジー理論から対空間のホモロジー理論を誘導できる。

定義 2.2. CW 複体 X に対し、$X_+ = X \coprod \{*\}$ と、0-胞体を加えた新たな CW 複体を考える。また、写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し、$f_+ : X_+ \longrightarrow Y_+$ が基点を保つ写像として拡張できる。

補題 2.3. $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ がホモトピー同値写像ならば、写像錐の間に誘導される写像、$Cf : C_i \longrightarrow C_j$ もホモトピー同値である。

証明 ホモトピー逆写像と、ホモトピーなどは自然に対空間から誘導される。 □

ちなみに、(X,A) が CW 対ならば、A の錐 $CA = A \times I / A \times 1$ は $\dim(A)+1$ の CW 複体である。よって、写像錐 $C_i = X \cup CA$ は CW 複体の張りあわせでできているため CW 複体である。

補題 2.4. X を空間とし、$A, B \subset X$ を閉集合で、$X = A \cup B$ とする。包含写像、$i : A \longrightarrow X$ から誘導される写像 $\tilde{i} : A/A \cap B \longrightarrow X/B$ は同相である。

証明 $\tilde{i}$ が全単射であることはすぐにわかる。また、A, B が閉集合なので、$\tilde{i}$ は閉写像であることもわかるため同相である。 □

定理 2.5. $\widetilde{E}_*$ を被約ホモロジー理論とする。対空間 (X,A) に対し、$E_*(X,A) = \widetilde{E}_*(X/A)$ と定義する。$A = \phi$ のとき、$E_*(X) \cong \widetilde{E}_*(X_+)$ である。同時に、

$$\partial_n : E_n(X,A) \longrightarrow E_{n-1}(A)$$

は、以下により定義する。これは、$\partial_n : \widetilde{E}_n(X/A) \longrightarrow \widetilde{E}_{n-1}(A_+)$ を定義するのだが、これは懸垂同型、

$$\Sigma : \widetilde{E}_{n-1}(A) \cong \widetilde{E}_n(\Sigma A)$$

と、射影

$$p : X/A \simeq C_i \longrightarrow C_i/X \cong \Sigma(A)$$

の誘導の合成により定義する。つまり、$\Sigma^{-1} \circ p_*$ とする。これは対空間のホモロジー理論である。

証明

1. $X = \{x_0\}$ のとき、$X_+ = S^0$ なので、次元公理は満たす。
2. ホモトピー公理は、補題 2.3 により導かれる。
3. 加法性公理だが、$\{(X_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ CW 対の族とすると、

   $$(X,A) = \left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)$$

   とおけば、

   $$X/A \cong \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda / A_\lambda)$$

   により成立する。
4. 完全性公理に関しては、示すべきは、

   $$\cdots \longrightarrow \widetilde{E}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{E}_n(X) \xrightarrow{j_*} \widetilde{E}_n(X/A) \xrightarrow{\partial_n} \widetilde{E}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

   の完全性である。これは後に説明するが、コファイバー列（各 3 項がコファイブレーションとホモトピー同値なもの）

   $$A \longrightarrow X \longrightarrow C_i \longrightarrow \Sigma A \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma(C_i) \longrightarrow \Sigma^2 A \longrightarrow \cdots$$

   が存在することから誘導される。
5. 切除定理については、$\{X; A, B\}$ が CW の切除 3 対とすると、A, B は閉集合であるから、補題 2.4 により示される。

□

CW 複体の圏に制限しなくとも、一般の位相空間に対するホモロジー理論というものもある。その際にはホモトピー公理を弱ホモトピー公理に置き換える必要がある。

3　ホモロジー理論における CW ホモロジー群

CW 複体においては、特異ホモロジー群と骨格を用いた CW ホモロジー群が同型であるという事実があった。それは公理系を用いても同様に示される。証明も同様である。

定理 3.1. E_* をホモロジー理論とする。CW 対 (X, A) において、

$$CE_n(X, A) = \{E_n\left(\overline{X^{(n)}}, \overline{X^{(n-1)}}\right), \partial\}$$

によって chain complex を定義する。このとき、$E_*(X, A) \cong H_*(CE(X, A))$ である。これは被約ホモロジーでも成り立つ。

4　ホモロジー理論の一意性

ではホモロジー理論の一意性を考えてみよう。ここでは、被約ホモロジー理論と被約特異ホモロジー群が自然に同型となることを示す。そうすれば、対空間の方も同様に示せる。

定理 4.1. $\widetilde{E}_*$ を被約ホモロジー理論とする。このとき、任意の基点付き CW 複体 $(X, *)$ に対し、自然な同型 $\widetilde{E}_*(X) \cong \widetilde{H}_*(X)$ が存在する。

証明 両方とも celluler chain のホモロジー群と同型である。つまり、$H_*\left(\widetilde{C}(X)\right) \cong \widetilde{H}_*(X)$ であり、また $H_*\left(\widetilde{C}E(X)\right) \cong \widetilde{E}_*(X)$ である。この二つの chain complex $\widetilde{C}(X)$ と $\widetilde{C}E(X)$ の間の同型な chain map を考えればよい。そこで、Hurewicz 準同型を用いる。商空間 $X^{(n)}/X^{(n-1)} \cong \bigvee S^n$ なので、

$$h_H : \pi_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right) \longrightarrow \widetilde{H}_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right)$$

と、

$$h_E : \pi_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right) \longrightarrow \widetilde{E}_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right)$$

は $n \geqq 2$ で同型である。$n = 1$ の時は π_1 のアーベル化、$n = 0$ の時は π_0 から生成される自由加群におきなおせば同様に同型である。Hurewicz 準同型は自然で懸垂写像と可換であったので、

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{E}_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right) \arrow[r, "\partial"] & \widetilde{E}_{n-1}\left(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}\right) \\
\pi_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, "h_E"] \arrow[d, "h_H"'] & \pi_{n-1}\left(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}\right) \arrow[u, "h_E"'] \arrow[d, "h_H"] \\
\widetilde{H}_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right) \arrow[r, "\partial"] & \widetilde{H}_{n-1}\left(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}\right)
\end{tikzcd}$$

は可換である。ただし、$\partial : \pi_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right) \longrightarrow \pi_{n-1}\left(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}\right)$ はホモロジーと同様に以下の合成で与えられる。

$$\pi_n\left(X^{(n)}/X^{(n-1)}\right) \cong \pi_n\left(X^{(n)} \cup CX^{(n-1)}\right) \longrightarrow \pi_n\left(\Sigma X^{(n-1)}\right) \longrightarrow \pi_n\left(\Sigma(X^{(n-1)}/X^{(n-2)})\right) \overset{\Sigma}{\cong} \pi_{n-1}\left(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}\right)$$

注意は $X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \cong \bigvee S^{n-1}$ で $(n-2)$ 連結より、Freudenthal 懸垂定理からホモトピー群においても同型になる点である。よって同型な chain map

$$h_H \circ h_E^{-1} : \widetilde{C}E(X) \longrightarrow \widetilde{C}(X)$$

が構成できたため、自然な同型 $\widetilde{E}_*(X) \cong \widetilde{H}_*(X)$ が導かれる。 □

被約のホモロジー理論は対空間のホモロジー理論に変換できたので、以下の系が成り立つ。

系 4.2. E_* をホモロジー理論とすると、任意の CW 対 (X, A) に対し、自然な同型 $E_*(X, A) \cong H_*(X, A)$ が存在する。