Chain complex

単体を複数張り合わせた空間（単体複体）について、その単体の枚数、各面の張り合わせ具合などを代数的に記述したのがホモロジー群である。それは一般的な位相空間に対しても特異単体というものを考え、その境界がどのようになっているかを考察し、特異ホモロジー群というものが考えられた。そのもとになるのが chain complex である。

1 Chain Complex

多種多様なホモロジー群はあるが、基本的には chain complex から構成される。

定義 1.1. Chain complex とはアーベル群と準同型写像の列

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

において、${}^\forall n \in \mathbf{Z}$ に対し $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ を満たすものである。これを C=$\{C_n, \partial_n\}$ で表す。また ∂ は微分、あるいは boundary と呼ばれる。

補題 1.2. $C = \{C_n, \partial_n\}$: chain complex に対し、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\mathrm{Im}\partial_{n+1} \subset \mathrm{Ker}\partial_n$ である。

証明 任意の $x \in \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ とすると、$y \in C_{n+1}$ が存在し、$\partial_{n+1}(y) = x$ である。よって、

$$\partial_n(x) = \partial_n(\partial_{n+1}(y)) = 0$$

であるため、$x \in \mathrm{Ker}\partial_n$ となる。 □

定義 1.3. $C = \{C_n, \partial_n\}$: chain complex に対し、アーベル群の部分群は正規なので、

$$H_n(C) = \mathrm{Ker}\partial_n / \mathrm{Im}\partial_{n+1}$$

によって定義し、これを C の n 次ホモロジー群と呼ぶ。

定義 1.4. $C = \{C_n, \partial_n^C\}$, $D = \{D_n, \partial_n^D\}$ を 2 つの chain complex としたとき、C から D への chain map とは、微分と可換な準同型の族

$$\{f_n : C_n \longrightarrow D_n \mid \partial_n^D \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^C\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

である。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\partial_n^C"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_n \arrow[r, "\partial_n^D"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

このとき、$f : C \longrightarrow D$ とかく。

補題 1.5. $f : C \longrightarrow D$: chain map とすると、各次元において準同型、$f_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ が誘導される。

証明 まず、$x \in \mathrm{Ker}\partial_n^C$ に対し、

$$\partial_n^D \circ f(x) = f \circ \partial_n^C(x) = 0$$

なので、$f(x) \in \mathrm{Ker}\partial_n^D$ である。つまり、$f(\mathrm{Ker}\partial_n) \subset \mathrm{Ker}\partial_n^D$ である。また、$x \in \mathrm{Im}\partial_n^C$ に対しても、$x = \partial_n^C(y)$ とかけば、

$$f(x) = f \circ \partial_n^C(y) = \partial_n^D \circ f(y)$$

なので、$f(x) \in \mathrm{Im}\partial_n^D$。よって、$f(\mathrm{Im}\partial_n^C) \subset \mathrm{Im}\partial_n^D$ となる。以上より、商群の間に誘導される準同型 $f_* : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$ が定まる。 $\square$

注意 1.6. $f_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ は、$f_*[c] = [f(c)]$ で与えられている。これより、H_* は関手であることがわかる。つまり、合成と恒等射を保つのである。$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ であり、$1_* = 1$ である。これよりすぐにわかることは、chain complex として $C \cong D$ が同型であれば、$H_*(C) \cong H_*(D)$ である。

ホモロジーは chain complex を割って構成される。よって、同型よりも弱い同値関係であってもホモロジーの同型を導く。

定義 1.7.

$C = \{C_n, \partial_n^C\}$, $D = \{D_n\ ,\ \partial_n^D\}$ を chain complex とし、その間の 2 つの chain map

$$f, g : C \longrightarrow D$$

が chain homotopic であるとは、各次元で次数を 1 つ上げる準同型 $\varphi_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ が存在し、$\partial_{n+1}^D \circ \varphi_n + \varphi_{n-1} \circ \partial_n^C = g_n - f_n$ を満たす。この φ を f と g をつなぐ chain homotopy とよぶ。このとき、$f \simeq g$ と書く。

補題 1.8. Chain map $f, g : C \longrightarrow D$ に対し、$f \simeq g$ ならば、$f_* = g_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ である。

証明 $f \simeq g$ より、chain homotopy $\varphi : C_* \longrightarrow D_{*+1}$ が存在し、$\partial_{n+1}^D \circ \varphi_n + \varphi_{n-1} \circ \partial_n^C = g_n - f_n$ を満たす。ここで $[c] \in H_n(C)$ に対し、$c \in \mathrm{Ker}\partial_n^C$ なので、

$$g_n(c) - f_n(c) = \partial_{n+1}^D \circ \varphi_n(c) + \varphi_{n-1} \circ \partial_n^C(c) = \partial_{n+1}^D(\varphi_n(c)) \in \mathrm{Im}\partial_{n+1}^D$$

よって、$[g_n(c)] = [f_n(c)] \in H_n(D)$ となる。 $\square$

定義 1.9. $C = \{C_n, \partial_n\}$ を chain complex としたとき、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し、部分群 $D_n \subset C_n$ が、$\partial_n(D_n) \subset D_{n-1}$ をみたすとき、$D = \{D_n, \partial_n\}$ を C の sub chain complex と呼んで、$D \subset C$ とかく。もちろん、D 自体も chain complex である。このとき、chain complex $C/D = \{C_n/D_n, \widetilde{\partial}_n\}$ が定義される。ちなみに、$\widetilde{\partial}_n[c] = [\partial_n(c)]$ である。またこのとき、各次元で包含写像からなる $i : D \longrightarrow C$ と、射影からなる $p : C \longrightarrow C/D$ は chain map である。

定義 1.10. アーベル群と準同型の列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ が完全列とは、$\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$ を満たすことである。より一般に、

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

が完全列とは、各 3 項がすべて完全列となることである。また、完全列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ を短完全列とよぶ。

補題 1.11.

1. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ が完全であることと、f が単射であることは同値である。
2. $C \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$ が完全であることと、g が全射であることは同値である。

証明 f が単射 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}f = \{0\} = \mathrm{Im}0$ である。同様にして、g が全射 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}g = D = \mathrm{Ker}0$ である。 $\square$

補題 1.12. C をアーベル群とし、$D \subset C$ を部分群とする。このとき、$0 \longrightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C/D \longrightarrow 0$ は完全列である。ただし、i は包含写像で、p は射影である。

証明 包含射と射影の性質から $\mathrm{Im} i = \mathrm{Ker} p$ である。また、i は単射で p は全射なので、補題 1.11 により、完全性が示される。 $\square$

定義 1.13. $\partial : H_n(C/D) \longrightarrow H_{n-1}(D)$ を $\partial[[c]] = [\partial_n(c)]$ で定義する。

補題 1.14. ∂ は well defined な準同型である。

証明 色々確かめなければならないことが多いが、まずは、$[c] \in \mathrm{Ker}\partial_n^{C/D}$ ならば、$\widetilde{\partial}_n[c] = [\partial_n(c)] = 0 \in C_{n-1}/D_{n-1}$ であるため、$\partial_n(c) \in D_{n-1}$ である。もちろん、$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ であるため、$\partial_n(c) \in \mathrm{Ker}\partial_{n-1}$ である。

次に、$[x] \in \mathrm{Im}\widetilde{\partial}_{n+1} \subset C_n/D_n$ に対し、$\widetilde{\partial}_{n+1}[y] = [\partial_{n+1}(y)] = [x]$ と表せるため、

$$[\partial_n(x)] = [\partial_n \circ \partial_{n+1}(y)] = 0$$

となる。よって、Image 部分は消えているので well defined である。 $\square$

定理 1.15. C を chain complex、$D \subset C$ を sub complex とする。このとき、

$$\cdots \longrightarrow H_n(D) \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{p_*} H_n(C/D) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(D) \longrightarrow \cdots$$

は完全列である。

証明 まず、$H_n(C)$ での完全性、つまり $\mathrm{Ker} i_* = \mathrm{Im} p_*$ を示す。

$$i_* \circ p_* = (i \circ p)_* = 0* = 0$$

よって、$\mathrm{Im} i_* \subset \mathrm{Ker} p_*$ である。逆の包含関係を示す。$[c] \in H_n(C)$ に対し、$[c] \in \mathrm{Ker} p_*$ とする。よって、$p_*[c] = [[c]] = 0 \in H_n(C/D)$ なので、$[c] \in \mathrm{Im}\widetilde{\partial}_{n+1}$ である。これより、$[c] = \widetilde{\partial}_{n+1}([x]) = [\partial_{n+1}(x)]$ と表せる。つまり、$c - \partial_{n+1}(x) \in D_{n+1}$ である。$c \in \mathrm{Ker}\partial_n$ なので、$\partial_n(c - \partial_{n+1}(x)) = 0$ となる。よって、$c - \partial_{n+1}^C(x) \in \mathrm{Ker}\partial_n$ ここで、$[c - \partial_{n+1}^C(x)] \in H_n(D)$ に対し、

$$i_*([c - \partial_{n+1}(x)]) = [c - \partial_{n+1}(x)] = [c] \in H_n(C)$$

これより、$\mathrm{Ker} i_* \subset\ \mathrm{Im} p_*$

次に、$H_n(C/D)$ での完全性、つまり $\mathrm{Ker} p_* = \mathrm{Im}\partial$ を示す。$[c] \in H_n(C)$ に対し、$c \in \mathrm{Ker}\partial_n$ より、

$$\partial \circ p_*[c] = \partial[[c]] = [\partial_n(c)] = 0$$

よって、$\mathrm{Im} p_* \subset \mathrm{Ker}\partial$ である。逆の包含関係を示す。$[[c]] \in H_n(C/D)$ に対し、$[[c]] \in \mathrm{Ker}\partial$ とする。これより、 $\partial[[c]] = [\partial_n(c)] = 0 \in H_{n-1}(D)$ となるから、$\partial_n(c) \in \mathrm{Im}\partial_n$ である。よって、ある $x \in D_n$ により、$\partial_n(x) = \partial_n(c)$ と表せる。

$$\partial_n(c - x) = \partial_n(c) - \partial_n(x) = 0$$

これより、$c - x \in \mathrm{Ker}\partial_n$ なので、$[c - x] \in H_n(C)$ に対し、$x \in D_n$ だから、$p_*[c - x] = [[c - x]] = [[c]] - [[x]] = [[c]] \in H_n(C/D)$ である。これより、$\mathrm{Ker} p_* \subset \mathrm{Im}\partial$ となる。

最後に、$H_{n-1}(D)$ での完全性、つまり $\mathrm{Ker}\partial = \mathrm{Im} i_*$ を示す。$[[c]] \in H_n(C/D)$ に対し、

$$i_* \circ \partial[[c]] = i_*[\partial_n(c)] = [\partial_n(c)] = 0$$

よって、$\mathrm{Im}\partial \subset \mathrm{Ker} i_*$ である。逆の包含関係を示す。$[d] \in H_{n-1}(D)$ に対し、$[d] \in \mathrm{ker} i_*$ とする。よって、$i_*[d] = [d] = 0 \in H_{n-1}(C)$ となる。これより、

$d \in \mathrm{Im}\partial_n$ である。よって、ある $x \in C_n$ により、$\partial_n(x) = d$ と表せる。ここで、$[x] \in C_n/D_n$ に対し、

$$\widetilde{\partial}_n[x] = [\partial_n(x)] = [d] = 0 \in C_{n-1}/D_{n-1}$$

よって、$[x] \in \mathrm{Ker}\widetilde{\partial}_n$ で、$[[x]] \in H_n(C/D)$ において、$\partial[[x]] = [\partial_n(x)] = [d]$ なので、$\mathrm{Ker}\partial \subset \mathrm{Im} i_*$ となる。 $\square$