CW 複体のコホモロジーは普遍係数定理により、CW 複体のホモロジーとほぼ平行した議論ができる。

Proposition 0.0.1

X を CW 複体とし、A をその部分複体する。$n \neq m$ ならば、$H^m(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}}) = 0$

proof) $i : \overline{X^{n-1}} \longrightarrow \overline{X^n}$ は cofibration であるから、

$$H^m(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}}) \cong \widetilde{H}^m(\bigvee S^n) \cong \prod \widetilde{H}^m(S^n)$$

であるため、$n \neq m$ ならば、$H^m(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}}) = 0$

□

Proposition 0.0.2

X を CW 複体とし、A をその部分複体する。このとき、$H^n(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}}) \cong H_n(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}})^\sharp$

proof) $H_{n-1}(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}}) = 0$ であったので、普遍係数定理より成立する。

□

Proposition 0.0.3

X を CW 複体とし、A をその部分複体する。$m > n$ のとき、$H^m(\overline{X^n}, A) = 0$

proof) ホモロジー参照

□

Proposition 0.0.4

X を CW 複体とし、A をその部分複体する。$m < n$ のとき、inclusion に対し、

$$i^* : H^m(X, A) \xrightarrow{\cong} H^m(\overline{X^n}, A)$$

proof) ホモロジー参照

□

Definition 0.0.5

X を CW 複体とし、A をその部分複体する。ホモロジーの時 cellular chain を思い出すと、$C(X,A) = \{\ H_n(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}})\ \partial_*\ \}$ であった。この双対 $C^\sharp(X,A)$ が定義できるので、cellular cochain と呼ぶ。

Theorem 0.0.6

X を CW 複体とし、A をその部分複体する。$C^\sharp(X,A)$ のコホモロジー群は (X,A) の特異コホモロジー群と同型である。つまり、$H^*(C(X,A)) \cong H^*(X,A)$

proof)　　次の図式

$$\begin{tikzcd}
H^n(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\delta^*"'] & H_n(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}})^\sharp \arrow[r, "="] \arrow[d, "(\partial_*)^\sharp"'] & C^n(X,A) \arrow[d, "\delta"] \\
H^{n+1}(\overline{X^{n+1}}, \overline{X^n}) \arrow[r, "\cong"'] & H_{n+1}(\overline{X^{n+1}}, \overline{X^n}) \arrow[r, "="'] & C^{n+1}(X,A)
\end{tikzcd}$$

は可換となり、左側の

$$\delta^* : H^n(\overline{X^n}, \overline{X^{n-1}}) \longrightarrow H^{n+1}(\overline{X^{n+1}}, \overline{X^n})$$

に対し、$\mathrm{Ker}\delta_n^*/\mathrm{Im}\delta_{n+1}^* \cong H^n(X,A)$ が成り立つことは、ホモロジー群の時と同様の方法で証明できる。よって、$H^*(C(X,A)) \cong H^*(X,A)$

$\square$