Definition 0.0.1

位相空間対 (X, A) において、$S(X, A)$ に対し、その双対 $S^\sharp(X, A)$ と、コホモロジー群 $H^*(X, A)$ を考えることにより、位相空間対のコホモロジー群を定義できる。もちろん、対空間の間の連続写像、

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

に対し、

$$f^* : H^*(Y, B) \longrightarrow H^*(X, A)$$

が誘導される。

Remmark 0.0.2

H^* : 位相空間対の圏 $\longrightarrow$ $Abel$ 　は反変関手である。

Remmark 0.0.3

任意の位相空間 X に対し、$H^*(X, X) = 0$, $H^*(X, \phi) = H^*(X)$

Theorem 0.0.4 　（完全性定理）

位相空間対 (X, A) に対し、次の完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(A) \xrightarrow{\delta^*} H^n(X, A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \longrightarrow \cdots$$

proof) 　　$S(X, A)$ は自由であるので、短完全列

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{i_\sharp} S(X) \xrightarrow{j_\sharp} S(X, A) \longrightarrow 0$$

が分解され、

$$0 \longrightarrow S^\sharp(X, A) \xrightarrow{j^\sharp} S^\sharp(X) \xrightarrow{i^\sharp} S^\sharp(A) \longrightarrow 0$$

が完全となるため、cochain 複体の完全列を思い出せば導かれる。

□

Proposition 0.0.5

位相空間対 (X, A) , (Y, B) と、$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ に対し、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "f^*"'] & H^n(Y, B) \arrow[d, "f^*"] \\
H^{n-1}(A) \arrow[r, "\delta^*"'] & H^*(X, A)
\end{tikzcd}$$

proof)　　ホモロジー群の時と同様。

□

Theorem 0.0.6　（加法性定理）

$(X_\lambda, A_\lambda)_\lambda$ を位相空間対の族とする。このとき、

$$(X, A) = (\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$$

とおくと、inclusion

$$i_\lambda : (X_\lambda, A_\lambda) \longrightarrow (X, A)$$

に対し、

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda^* : H^*(X, A) \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} H^*(X_\lambda, A_\lambda)$$

は同型である。

proof)　　完全性定理、five lemma、singular cohomology の加法性定理を使えば導かれる。

□

Theorem 0.0.7　（ホモトピー定理）

位相空間 (X, A) , (Y, B) に対し、対空間の連続写像

$$f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

が homotopic であるならば、$f^* = g^* : H^*(Y, B) \longrightarrow H^*(X, A)$

proof)　　対空間のホモロジー群のホモトピー定理を思い出せばよし。

□

Theorem 0.0.8 （切除定理）

$\{X; A, B\}$: exisive triad ならば、inclusion

$$i : (B, A \cap B) \longrightarrow (X, A)$$

に対し、

$$i^* : H^*(X, A) \longrightarrow H^*(B, A \cap B)$$

は同型である。

proof) ホモロジー群の時を思い出せば、

$$i_\sharp : S(A, A \cap B) \longrightarrow S(X, A)$$

が chain homotopy equivalence であるため、その双対

$$i^\sharp : S^\sharp(X, A) \longrightarrow S^\sharp(B, A \cap B)$$

が、chain homotopy equivalence である。よって、

$$i^* : H^*(X, A) \longrightarrow H^*(B, A \cap B)$$

は同型である。

□

Corollary 0.0.9

位相空間 X、$U \subset A \subset X$ において、$\overline{U} \subset \mathrm{Int}A$ ならば、

$$i : (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$$

を inculusion とすれば、

$$i^* : H^*(X, A) \longrightarrow H^*(X - U, A - U)$$

は同型である。

Theorem 0.0.10 *(マイヤー・ヴィートリス完全列)*

$\{X; A, B\}$ が exisive triad であるならば、次は完全列となる。

$$\cdots \longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{i} H^n(A) \oplus H^n(B) \xrightarrow{j} H^n(A \cap B) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

ただしここで、$i(x) = (i_A^*(x), -i_A^*(x))$, $j(a, b) = j_A^*(a) + j_B^*(b)$ （各々inclusion）

マイヤー・ヴィートリス完全列とカップ積、およびキャップ積の関係は以下のようになる。

Definition 0.0.11

位相空間 X に対し、$\beta \in H^m(X)$ に対し、準同型

$$\cup\beta\ ,\ \beta\cup : H^n(X) \longrightarrow H^{n+m}(X)$$

が、$\cup\beta(\alpha) = \alpha \cup \beta$, $\beta \cup (\alpha) = \beta \cup \alpha$ により定義できる。同様に、

$$\beta\cap : H_{n+m}(X) \longrightarrow H_n(X)$$

が、$\beta \cap (\alpha) = \beta \cup \alpha$ により定義できる。

Proposition 0.0.12

$\{A, B\}$ が X の exisive pair であるとする。$\beta \in H^m(A \cup B)$ を取り、inclusion

$$k : A \cap B \longrightarrow A \cup B$$

を考えると、$k^*(\beta) \in H^m(A \cap B)$ であり、マイヤー・ヴィートリス完全列での連結準同型、

$$\delta^* : H^n(A \cap B) \longrightarrow H^{n+1}(A \cup B)$$

を、考えると次の図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd} H^n(A \cap B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\cup k^*(\beta)"'] & H^{n+1}(A \cup B) \arrow[d, "\cup\beta"] \\ H^{n+m}(A \cap B) \arrow[r, "\delta^*"'] & H^{n+m+1}(A \cup B) \end{tikzcd}$$

proof)　　$\alpha = [u] \in H^n(A \cap B)$ を取り、$\beta = [v] \in H^m(A \cup B)$ とする。

マイヤー・ヴィートリス完全列を思い起こすと、これは、

$$0 \longrightarrow S^\sharp(A \cup B) \xrightarrow{i} S^\sharp(A) \oplus S^\sharp(B) \xrightarrow{j} S^\sharp(A) + S^\sharp(B) \longrightarrow 0$$

の短完全列から派生するものであった。ここで、i, j はそれぞれ、

$$i_A : A \longrightarrow A \cup B\ ,\ i_B : B \longrightarrow A \cup B\ ,\ j_A : A \cap B \longrightarrow A\ ,\ j_B : A \cap B \longrightarrow B$$

を inculusion としたとき、

$$i(x) = (i_A^*(x), -i_A^*(x))\ ,\ j(a,b) = j_A^*(a) + j_B^*(b)$$

であったので、$\delta^*(\alpha) = \delta^*[u] = [i^{-1}\delta j^{-1}(u)]$ である。

そこで、$(u_1, u_2) \in j^{-1}(u)$ を取り、$w \in i^{-1}\delta(u_1, u_2)$ とすれば、

$$\delta^*[u] = [w] \text{ であり、} i_A^\sharp(w) = \delta(u_1)\ ,\ -i_B^\sharp(w) = \delta(u_2)\ ,\ j_A^\sharp(u_1) + j_B^\sharp(u_2) = u$$

である。これより、$\delta^*(\alpha) \cup \beta = \delta^*[u] \cup [v] = [w \cup v]$。一方、

$$\begin{aligned}
&\delta^*(\alpha \cup k^*(\beta)) \\
&= \delta^*[u \cup k^\sharp(v)] \\
&= \delta^*[(j_A^\sharp(u_1) + j_B^\sharp(u_2) \cup k^\sharp(v)] \\
&= \delta^*[(j_A^\sharp(u_1) \cup k^\sharp(v) + j_B^\sharp(u_2) \cup k^\sharp(v)] \\
&= \delta^*[(j_A^\sharp(u_1) \cup j_A^\sharp \circ i_A^\sharp(v) + j_B^\sharp(u_2) \cup j_B^\sharp \circ i_B^\sharp(v)] \\
&= \delta^*[(j_A^\sharp(u_1 \cup i_A^\sharp(v)) + j_B^\sharp(u_2 \cup i_B^\sharp(v))] \\
&= \delta^*[j(u_1 \cup i_A^\sharp(v)), u_2 \cup i_B^\sharp(v)] \\
&= [i^{-1}\delta(u_1 \cup i_A^\sharp(v)), u_2 \cup i_B^\sharp(v)] \\
&= [i^{-1}(\delta(u_1) \cup i_A^\sharp(v) + (-1)^n u_1 \cup \delta \circ i_A^\sharp(v), \delta(u_2) \cup i_B^\sharp(v) + (-1)^n u_2 \cup \delta \circ i_B^\sharp(v)] \\
&= [i^{-1}(i_A^\sharp(w) \cup i_A^\sharp(v) + (-1)^n u_1 \cup i_A^\sharp \circ \delta(v), -i_B^\sharp(w) \cup i_B^\sharp(v) + (-1)^n u_2 \cup i_B^\sharp \circ \delta(v)] \\
&= [i^{-1}(i_A^\sharp(w \cup v), -i_B^\sharp(w \cup v)] \\
&= [w \cup v]
\end{aligned}$$

以上により、$\delta^*(\alpha) \cup \beta = \delta^*(\alpha \cup k^*(\beta))$

□

Corollary 0.0.13

$\{A, B\}$ が X の exisive pair であるとする。$\beta \in H^m(A \cup B)$ を取り、inclusion

$$k : A \cap B \longrightarrow A \cup B$$

を考えると、$k^*(\beta) \in H^m(A \cap B)$ であり、マイヤー・ヴィートリス完全列での連結準同型、

$$\delta^* : H^n(A \cap B) \longrightarrow H^{n+1}(A \cup B)$$

を、考えると次の図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd}
H^n(A \cap B) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "k^*(\beta)\cup"'] & H^{n+1}(A \cup B) \arrow[d, "(-1)^m \beta\cup"] \\
H^{n+m}(A \cap B) \arrow[r, "\delta^*"'] & H^{n+m+1}(A \cup B)
\end{tikzcd}$$

キャップ積はホモロジー群のマイヤー・ヴィートリスについて自然になる。証明は全く同じなので省略する。

Corollary 0.0.14

$\{A, B\}$ が X の exisive pair であるとする。$\beta \in H^m(A \cup B)$ を取り、inclusion

$$k : A \cap B \longrightarrow A \cup B$$

を考えると、$k^*(\beta) \in H^m(A \cap B)$ であり、マイヤー・ヴィートリス完全列での連結準同型、

$$\partial_* : H_n(A \cup B) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B)$$

を、考えると次の図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd}
H_{n+m}(A \cup B) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\beta\cap"'] & H_{n+m-1}(A \cap B) \arrow[d, "k^*(\beta)\cap"] \\
H_n(A \cup B) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-1}(A \cap B)
\end{tikzcd}$$

Theorem 0.0.15 （マイヤー・ヴィートリス完全列）

位相空間対 (X,A) に対し、X の部分集合からなる位相空間対 (X_1,A_2) , (X_2,A_2) を考える。このとき、

$\{X;X_1,X_2\}$, $\{A;A_1,A_2\}$ がともに、exisive triad ならば、次の完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(X_1\cap X_2, A_1\cap A_2) \xrightarrow{\delta^*} H^n(X,A) \xrightarrow{i}$$
$$H^n(X_1,A_1)\oplus H^n(X_2,A_2) \xrightarrow{j} H^n(X_1\cup X_2, A_1\cap A_2) \longrightarrow \cdots$$

ただしここで、$i(x)=(i_A^*(x),-i_A^*(x))$, $j(a,b)=j_A^*(a)+j_B^*(b)$ （各々inclusion）

Theorem 0.0.16

位相空間対 (X,A) , (Y,B) に対し、$\{A\times Y, X\times B\}$ が $X\times Y$ のexisive pair であるとする。このとき、

$$H^*(S(X,A)\otimes S(Y,B)) \cong H^*((X,A)\times(Y,B))$$

であり、この同型は連続写像に関して自然である。

proof)　　$\{A\times Y, X\times B\}$ が $X\times Y$ のexisive pair ということは、つまり、inclusion に対し、

$$S(A\times Y)+S(Y\times B)\simeq S(A\times Y\cup X\times B)$$

である。これより、

$$S^\sharp((X,A)\times(Y,B)) = (S(X\times Y)/S(A\times Y\cup X\times B))^\sharp \overset{i^\sharp}{\simeq} (S(X\times Y)/S(A\times Y)+S(X\times B))^\sharp$$

また、$\rho^\sharp : (S(X,A)\otimes S(Y,B))^\sharp \longrightarrow (S(X\times Y)/S(A\times Y)+S(X\times B))^\sharp$ に対し、

$$(j\circ\rho)^* : H^*(S(X,A)\otimes S(Y,B)) \xrightarrow{\cong} H^*((X,A)\times(Y,B))$$

である。ただし、j は $i^\sharp$ の chain homotopy enverce である。また、自然性も連続写像の時同様に成り立つ。

□

Definition 0.0.17

位相空間対 (X,A) , (Y,B) に対し、$\mu : S^\sharp(X,A) \otimes S^\sharp(Y,B) \longrightarrow (S(X,A) \otimes S(Y,B))^\sharp$ において、

$$j \circ \rho \circ \mu : S^\sharp(X,A) \otimes S^\sharp(Y,B) \longrightarrow S^\sharp((X,A) \times (Y,B))$$

を考えると、$u \otimes v \in S^\sharp(X,A) \otimes S^\sharp(Y,B)$ の像を $u \times v$ と書き、u, v のクロス積と呼ぶ。

これより、位相空間でのクロス積と同様に、$[u] \in H^n(X,A)$, $[v] \in H^m(Y,B)$ に対し、$[u] \times [v] \in H^{n+m}((X,A) \times (Y,B))$ を、$[u] \times [v] = [u \times v]$ により、定義できる。つまり、

$$\kappa : H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B) \longrightarrow H^*(S^\sharp(X,A) \otimes S^\sharp(Y,B))$$

が定義され、

$$\times = i^{*-1} \circ \rho^* \circ \mu^* \circ \kappa : H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B) \longrightarrow H^*((X,A) \times (Y,B))$$

と定義すれば、$\times(\alpha \otimes \beta) = \alpha \times \beta$ となる。

Theorem 0.0.18 （*künneth* の定理）

位相空間対 (X,A) , (Y,B) に対し、$\{A \times Y, X \times B\}$ が $X \times Y$ の exisive pair とする。また、$H_*(X,A)$ あるいは $H_*(Y,B)$ が有限型で自由ならば、

$$\times : H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B) \longrightarrow H^*((X,A) \times (Y,B))$$

は同型である。