Definition 0.0.1

基点付き空間 (X, x_0) に対し、$\widetilde{H}^*(X) = H^*(X, x_0)$

と定義し、X の被約コホモロジー群と呼ぶ。また、

(X, x_0) , (Y, y_0) と、基点を保つ写像、$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ に対し、

$$f^* : \widetilde{H}^*(Y) \longrightarrow \widetilde{H}^*(X)$$

が誘導される。

被約コホモロジー群は実はなぜだか、ただの基点付きではなく、非退化な基点つき空間で定義されるのが一般である。

Remmark 0.0.2

$\widetilde{H}^*$: 非退化な基点つき空間の圏 $\longrightarrow$ $Abel$ は反変関手である。

Remmark 0.0.3

X : 一点空間に対し、$\widetilde{H}^*(X) = 0$

Theorem 0.0.4 （次元定理）

$$\widetilde{H}^n(S^0) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

proof) $\widetilde{H}_*(S^0)$ が自由であるから、普遍係数定理より、

$$\widetilde{H}^*(S^0) = H^*(S^0, x_0) \cong H_*(S^0, x_0)^\sharp \cong \widetilde{H}_*(S^0)^\sharp$$

だから、成り立つ。

□

Proposition 0.0.5

位相空間対 (X, A) に対し、$i : A \longrightarrow X$ が cofibration であるなら、

$$p^* : \widetilde{H}^*(X/A) \longrightarrow H^*(X, A)$$

は同型である。

proof)　被約ホモロジー群を思い出せば、mapping cone を用いて、

$$\begin{tikzcd}
(C_i - *, CA - *) \arrow[r, "i"] & (C_i, CA) \arrow[d, "q"] \\
(X, A) \arrow[u, "j"] \arrow[r, "p"'] & (X/A, *)
\end{tikzcd}$$

が可換になり、q, j が homotopy equivalence で、i は切除同型の inclusion となる。
よって、

$$p^* : \widetilde{H}^*(X/A) \longrightarrow H^*(X, A)$$

は同型である。

$\square$

Theorem 0.0.6　（完全性定理）

位相空間対 (X, A, x_0) に対し、$i : A \longrightarrow X$ が基点付き cofibration ならば、

$$H^*(X/A) \xrightarrow{p^*} \widetilde{H}^*(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{H}^*(A)$$

は完全である。ただし、p は projection

proof)　Prop　0.0.5 と 3 対 (X, A, x_0) の長い完全列から成立。

Theorem 0.0.7　（加法性定理）

$\{(X_\lambda, x_{\lambda_0})\}_{\lambda\in\Lambda}$ は非退化な基点つき空間の族とする。

$$X = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

とおくと、inclusion $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$ に対し、

$$\prod {i_\lambda}^* : \widetilde{H}^*(X) \longrightarrow \prod \widetilde{H}^*(X_\lambda)$$

は同型

proof)　空間対の加法性定理、ホモロジーの加法性定理を参照すればよい。

□

Theorem 0.0.8　（ホモトピー定理）

基点を保つ連続写像 $f, g : X \longrightarrow Y$ に対し、$f \simeq g$ ならば、$f^* = g^* : \widetilde{H}^*(Y) \longrightarrow \widetilde{H}^*(X)$

proof)　空間対で証明済み。

□

Corollary 0.0.9

可縮な空間 X に対し、$\widetilde{H}^*(X) = 0$

Theorem 0.0.10　（懸垂定理）

非退化な基点つき空間 (X, x_0) に対し、

$$^{\exists}\Sigma : \widetilde{H}^n(X) \longrightarrow \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma X) \quad \text{同型}$$

s.t　$f : Y \longrightarrow X$ に対し、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}^n(X) \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "f^*"'] & \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma X) \arrow[d, "(\Sigma f)^*"] \\
\widetilde{H}^n(Y) \arrow[r, "\Sigma"'] & \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma Y)
\end{tikzcd}$$

proof)　ホモロジーを思い出せばよいのだが、一応説明すると、

対空間 (CX, X, x_0) の完全列と、CX が可縮な事から、

$$\delta^* : \widetilde{H}^n(X) \longrightarrow H^{n+1}(CX, X)$$

は同型であり、$i : X \longrightarrow CX$ が cofibration であるのと、$CX/X \cong \Sigma X$ であるため、

$$p^* : \widetilde{H}^n(\Sigma X) \longrightarrow H^n(CX, X)$$

が同型となる。この二つを用いて、同型

$$\Sigma = {p^*}^{-1} \circ \delta^* : H^n(X) \longrightarrow H^{n+1}(\Sigma X)$$

が構成できる。また、$f : Y \longrightarrow X$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}^n(X) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "f^*"'] & H^{n+1}(CX, X) \arrow[d, "(Cf)^*"'] & \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma X) \arrow[l, "p^*"'] \arrow[d, "(\Sigma f)^*"] \\
\widetilde{H}^n(Y) \arrow[r, "\delta^*"'] & H^{n+1}(CY, Y) & \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma Y) \arrow[l, "p^*"]
\end{tikzcd}$$

の図式が成り立つので、題意の図式が可換となる。

□

Proposition 0.0.11

$$\widetilde{H}^n(S^m) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$