Definition 0.0.1

E^* : 位相空間対の圏から次数付きアーベル群への反変関手で、$E^*(X) = E^*(X, \phi)$ と書き、f : $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ 　に対し、$E^*(f) = f^*$ 　とかく。このとき、

$$\delta^n \ : \ E^{n-1}(A) \longrightarrow E^n(X, A) \ : \ \text{natural homomorphism}$$

が与えられ、これらについて次の５つの公理を満たすとき、E^* を Cohomology Theory と呼ぶ。

1) 　Dimension axiom

$$X = \{x_0\} \quad \Longrightarrow \quad E^n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2) 　Exactness axiom

(X, A) : pair of top sp 　に対し、

$$i \ : \ A \longrightarrow X \quad \textit{inclusion}$$

$$j \ : \ (X, \phi) \longrightarrow (X, A) \quad \textit{inclusion}$$

に対し、次は完全列である。

$$\cdots \longrightarrow E^{n-1}(A) \xrightarrow{\delta^*} E^n(X, A) \xrightarrow{j^*} E^n(X) \xrightarrow{i^*} E^n(A) \longrightarrow \cdots$$

3) 　Excision axiom

$\{X; A, B\}$: exisive triad 　　ならば、

$$i \ : \ (A, A \cap B) \longrightarrow (X, B) \quad \textit{inclusion}$$

に対し、

$$i_* \ : \ E^*(X, B) \longrightarrow E^*(A, A \cap B)$$

は同型である。

4) 　Additivity axiom

$\{(X_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$: 位相空間対の族 　, 　$(X, A) = (\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \ , \ \coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$ とおく。

$$i_\lambda \ : \ (X_\lambda, A_\lambda) \longrightarrow (X, A) \quad \textit{inclusion} \quad \text{に対し、}$$

$$\prod {i_\lambda}^* \ : \ E^*(X,A) \longrightarrow \prod E^*(X_\lambda\ ,\ A_\lambda) \qquad \text{同型}$$

5) Homotopy axiom

$$f\ ,\ g\ :\ (X,A) \longrightarrow (Y,B)\ \ \text{homotopic} \quad \Longrightarrow \quad f^* = g^*\ :\ E^*(Y,B) \longrightarrow E^*(X,A)$$

Remmark 0.0.2

対空間の特異コホモロジー関手は、Cohomology Theory である。

Definition 0.0.3

$\widetilde{E}^*$: 非退化な基点付き空間の圏から次数付きアーベル群への反変関手で、次を満たすとき Reduced Cohomology Theory とよぶ。

$f\ :\ X \longrightarrow Y$ 基点を保つ写像に対し、$\widetilde{E}^*(f) = f^*$ とかく。このとき、

1) Dimension axiom

$$X = S^0 \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{E}^n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2) Exactness axiom

(X, x_0) : 非退化な基点付き空間 , $x_0 \in A \subset X$ に対し、

$i\ :\ A \longrightarrow X$ 基点付き cofibration ならば、

$p\ :\ X \longrightarrow X/A$ projection

に対し、次は完全列である。

$$\widetilde{E}^n(X/A) \xrightarrow{p^*} \widetilde{E}^n(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{E}^n(A)$$

3) Suspension axiom

$$^\exists\Sigma\ :\ \widetilde{E}^{n-1}(X) \longrightarrow \widetilde{E}^n(\Sigma X) \qquad \text{natural isomorphism}$$

4) Additivity axiom

$\{(X_\lambda\ ,\ x_{\lambda_0})\}_{\lambda\in\Lambda}$: 非退化な基点付き空間の族 $\quad X = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく。

$$i_\lambda\ :\ X_\lambda \longrightarrow \bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \quad \text{inclusion} \qquad \text{に対し、}$$

$$\prod i_\lambda{}^* \ : \ \widetilde{E}^*(X) \longrightarrow \prod \widetilde{E}^*(X_\lambda) \quad \text{同型}$$

5) Homotopy axiom

$$f\ ,\ g\ :\ X \longrightarrow Y \quad \text{homotopic} \quad \Longrightarrow \quad f^* = g^*\ :\ \widetilde{E}^*(Y) \longrightarrow \widetilde{E}^*(X)$$

Remmark 0.0.4

特異被約コホモロジー関手は、Reduced Cohomology Theory である。

Theorem 0.0.5

CW 複体対の圏においては、Cohomology Theory は同型を除いて一意に決まる。

Theorem 0.0.6

基点つき CW 複体の圏においては、Reduced Cohomology Theory は同型を除いて一意に存在する。