0.1　係数を持つホモロジー群

これまでの特異ホモロジー群というのを思い出してみると、それは、

$$\Delta_n(X) = \{\ \sigma : \Delta^n \longrightarrow X \quad \text{conti}\}$$

の集合から生成される自由加群 $S_n(X)$ の部分商群として定義された。ここで自由加群の定義は係数に $\mathbf{Z}$ を用いていたが、実際には環 R で定義できる。

Definition 0.1.1

基礎環 R と集合 X に対し、

$$F(X) = \{\ \Sigma r_i x_i\ | r_i \in R\ ,\ x_i \in X\}$$

とおくと形式和により R 加群となる。これを X から生成される自由加群とよぶ。

よって、chain complex 等も R 加群で定義しなおし、$S_n(X)$ から誘導されるホモロジー群を R を係数とする n 次ホモロジー群と呼び、$H_n(X)$ と書く。R を強調したいときは、$H_n(X;R)$ と書く。今までのホモロジー群は $H_n(X;\mathbf{Z})$ であったということになる。

係数が R になったことで $\mathbf{Z}$ の時と変わることはほぼない。次元定理等で計算された答えの $\mathbf{Z}$ を R に変えれば問題ない。完全性や切除性が崩れるわけでもない。ただ一部、射影空間等のホモロジー群や普遍係数定理・kunneth 定理に影響がある。それは次にやる、より一般性のある R 加群 π を係数に持つホモロジー群というところで考える。その前に、その定義に tensor product を用いるのでその定義と性質を振り返っておく。

Definition 0.1.2

A, B : 加群に対し、群としてではなく、

集合としての $A \times B$ から生成される自由加群 $F(A \times B)$

を考え、さらにその部分群 $F'(A \times B)$ を、以下の形の元から生成される部分群とする。

1. $(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$
2. $(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$

3. $n(a,b)-(na,b)$

4. $n(a,b)-(a,nb)$

このとき、商群　$F(A\times B)/F'(A\times B)=A\otimes B$　とかく。

また、$(a,b)\in A\times B$ で表される代表元を $a\otimes b$ とかき、a と b のテンソル積と呼ぶ。定義の仕方から明らかに次のことが成り立つ。

1. $(a_1+a_2)\otimes b=a_1\otimes b+a_2\otimes b$

2. $a\otimes(b_1+b_2)=a\otimes b_1+a\otimes b_2$

3. $n(a\otimes b)=na\otimes b=a\otimes nb$

Remmark 0.1.3

$A\otimes B$ の元は、$\sum r_i a_i\otimes b_i \quad (r_i\in\mathbf{R}\ ,\ a_i\in A\ ,\ b_i\in B)$ と表せる。ただし、これは一意的ではない。つまり、$A\otimes B$ は自由とは限らない。

Lemma 0.1.4

A : 加群 に対し、$A\cong\mathbf{R}\otimes A\cong A\otimes\mathbf{R}$

Lemma 0.1.5

$$A\otimes B\cong B\otimes A$$

Lemma 0.1.6

$$A\otimes(B\otimes C)\cong(A\otimes B)\otimes C$$

Lemma 0.1.7

A,B : 加群、$0\in A\ ,\ b\in B$ に対し、$0\otimes b=0$

Definition 0.1.8

C,D : 次数付き加群に対し、

$$(C\otimes D)_n=\bigoplus_{p+q=n}C_p\otimes D_q$$

で定義することにより、次数付き加群

$$C\otimes D=\{(C\otimes D)_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$$

が定義できる。

Definition 0.1.9

C, C', D, D' : 次数付き加群と、

$$f : C \longrightarrow C' \quad r\text{ 準同型} \qquad g : D \longrightarrow D' \quad s\text{ 準同型}$$

に対し、

$$\bigoplus_{p+q=n} f_p \otimes g_q : \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} C'_{p+r} \otimes D'_{q+s}$$

なので、

$$(f \otimes g)_n : (C \otimes D)_n \longrightarrow (C' \otimes D')_{n+r+s}$$

とかき、これより、

$$f \otimes g : C \otimes D \longrightarrow C' \otimes D'$$

は $r+s$ 準同型である。

Definition 0.1.10

C, D : chain complex に対し、次数 -1 の準同型

$$\partial : C \otimes D \longrightarrow C \otimes D$$

を次で定義する。$c \in C_p$, $d \in D_q \quad (p+q=n)$ に対し、

$$\partial(c \otimes d) = \partial(c) \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial(d)$$

Proposition 0.1.11

$$(C \otimes D, \partial)\text{ は chain complex}$$

Proposition 0.1.12

C, C', D, D' : chain complex と、chain map

$$\varphi : C \longrightarrow C' \quad , \quad \psi : D \longrightarrow D'$$

に対し、

$$\varphi \otimes \psi : C \otimes D \longrightarrow C' \otimes D'$$

は chain map である。

Proposition 0.1.13

C, C', D, D'：chain complex と、chain map

$$\varphi, \varphi' : C \longrightarrow C' \quad , \quad \psi, \psi' : D \longrightarrow D'$$

に対し、$\varphi \simeq \varphi'$, $\psi \simeq \psi'$ ならば、$\varphi \otimes \psi \simeq \varphi' \otimes \psi'$

Proposition 0.1.14

$\{A_\lambda\}$, $\{B_\mu\}$：加群の族に対し、

$$(\bigoplus_\lambda A_\lambda) \otimes (\bigoplus_\mu B_\mu) \cong \bigoplus_{\lambda,\mu}(A_\lambda \otimes B_\mu)$$

ではそろそろ加群 π を係数に持つホモロジー群を定義する。

Definition 0.1.15

π を R 群とする。このとき、

$$S_*(X;\pi) = S_*(X) \otimes \pi$$

で定義すると、boundary を $\partial \otimes 1$ で定義することにより、chain complex となる。これより誘導されたホモロジー群を、$H_*(X;\pi)$ と書く。同様にして対空間 (X, A) に対しても、$S_*(X, A;\pi) = S_*(X, A) \otimes \pi$ で定義し、ここから $H_*(X, A;\pi)$ が定義できる。さらに Reduced に対しても $\widetilde{S}_*(X;\pi) = \widetilde{S}_*(X) \otimes \pi$ から $\widetilde{H}_*(X;\pi)$ が定義される。

さて、加群を係数にもつホモロジー群は今までの議論と何か変わったところはあるのだろうか。tensor 積の性質と特異ホモロジー群の議論を再度思い起こせば次のようなことは事実が浮かび上がる。

Theorem 0.1.16

natural な準同型、

$$\partial : H_n(X, A;\pi) \longrightarrow H_{n-1}(A;\pi)$$

が定義できる。

Theorem 0.1.17

$$X = \{x_0\} \text{ のとき、 } H_n(X;\pi) = \begin{cases} \pi & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Theorem 0.1.18

(X, A) に対し、次の完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H_n(A;\pi) \longrightarrow H_n(X;\pi) \longrightarrow H_n(X, A;\pi) \longrightarrow H_{n-1}(A;\pi) \longrightarrow \cdots$$

Theorem 0.1.19

$(X; A, B)$ が exisive triad ならば inclusion からの誘導、

$$i_* : H_*(B, A \cap B;\pi) \longrightarrow H_*(X, A;\pi)$$

は同型である。

Theorem 0.1.20

$f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ が homotopic であるならば、

$$f_* = g_* : H_*(X, A;\pi) \longrightarrow H_*(Y, B, \pi)$$

である。

Theorem 0.1.21

$(X, A) = (\coprod X_\lambda, \coprod A_\lambda)$ であるとき、inclusion からの誘導、

$$\Sigma i_{\lambda *} : \oplus H_*(X_\lambda, A_\lambda;\pi) \longrightarrow H_*(X, A;\pi)$$

は同型である。

完全列に関しては次の事実もある。

Theorem 0.1.22

位相空間 X と、加群の完全列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

に対し、次の完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H_n(X;A) \longrightarrow H_n(X;B) \longrightarrow H_n(X;C) \longrightarrow H_{n-1}(X;A) \longrightarrow \cdots$$

proof)　$S_*(X)$ は自由なので、

$$0 \longrightarrow S_*(X) \otimes A \longrightarrow S_*(X) \otimes B \longrightarrow S_*(X) \otimes C \longrightarrow 0$$

は chain complex の短完全列となる。これより、

$$\cdots \longrightarrow H_n(X;A) \longrightarrow H_n(X;B) \longrightarrow H_n(X;C) \longrightarrow H_{n-1}(X;A) \longrightarrow \cdots$$

が導かれる。

□

具体的なホモロジー群の計算においては次のようなことがあげられる。

Theorem 0.1.23

$$H_n(S^m;\pi) = \begin{cases} \pi & n = 0, m \\ 0 & n \neq 0, n \end{cases}$$

proof)　結局は 1 点空間 に帰着する。

□

実射影空間については少し状況が変化してくる。とりあえず任意の加群ではなく基礎環 R を係数とするホモロジー群は以下のようになる。

Theorem 0.1.24

$$H_n(\mathbf{R}P^m;R) = \begin{cases} R & n = m \text{ が } 0 \text{ または奇数} \\ {}_2R & n \text{ が偶数で } 0 < n \leqq m \\ R_2 & n \text{ が奇数で } 0 < n < m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし、$R_2 = R/2R$, ${}_2R = \{\ r \in R \mid 2r = 0\ \}$

特に $R = \mathbf{Z}_2$ のときは、

$$H_n(\mathbf{R}P^m; \mathbf{Z}_2) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2 & 0 \leqq n \leqq m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

proof) 証明は **Z** 係数を参考のこと。

□