Remmark 0.0.1

A を R 加群としたとき、

$$\otimes A : R\text{加群} \longrightarrow R\text{加群}$$

が、共変関手として定義され、

$$\mathrm{Hom}(\quad, A) : R\text{加群} \longrightarrow R\text{加群}$$

が反変関手として定義される。これより、

$$\otimes A : DGM \longrightarrow DGM \quad , \quad \mathrm{Hom}(\quad, A) : DGM \longrightarrow DGM$$

ともなり、これらは chain homotopic を保つ。

以後の理論は次の二つの事実から端を発する。$\otimes$ や Hom における完全性に関することである。

Proposition 0.0.2

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

が完全列のとき、D を加群とすると

$$A \otimes D \xrightarrow{f\otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{g\otimes 1} C \otimes D \longrightarrow 0$$

が完全となり、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, D) \xrightarrow{g^\sharp} \mathrm{Hom}(B, D) \xrightarrow{f^\sharp} \mathrm{Hom}(A, D)$$

が完全となる。

Proposition 0.0.3

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

が完全列のとき、D を加群とすると

$$0 \longrightarrow A \otimes D \xrightarrow{f\otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{g\otimes 1} C \otimes D \longrightarrow 0$$

そして、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, D) \xrightarrow{g^\sharp} \mathrm{Hom}(B, D) \xrightarrow{f^\sharp} \mathrm{Hom}(A, D) \longrightarrow 0$$

は完全とは限らない。

つまり、$f \otimes 1$ の単射性、$f^\sharp$ の全射性に問題がある。というわけで単射、全射を計る物差しは Ker と Im、あるいは Coker である。だが、それを考える前に次のことを知らなければならない。

Definition 0.0.4

A を加群としたとき、

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

が C, B を自由加群とした完全列が存在するとき、この完全列を A の自由分解とよぶ。

Theorem 0.0.5

単項イデアル整域上の任意の加群 A に対しその自由分解が存在する。

proof)　　A を集合とみて、そこから生成された自由加群 $F(A)$ を考える。ここから、

$$g : F(A) \longrightarrow A$$

を形式和から A での和に変換することにより全射準同型が得られる。また、Ker$g$ を考えれば仮定から自由加群になる。よって f を inclusion とすれば、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}g \xrightarrow{f} F(A) \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

が A の自由分解となる。

□

Remmark 0.0.6

A の自由分解は一意ではない。

proof)　　$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ を A の自由分解とする。ここで勝手な自由加群 D に対し、

$$0 \longrightarrow C \oplus D \xrightarrow{f \oplus 1} B \oplus D \xrightarrow{g \oplus p} A \longrightarrow 0$$

が完全となり、これも A の自由分解となる。

□

Lemma 0.0.7

A, A' を加群とし、その自由分解をそれぞれ、

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} A' \longrightarrow 0$$

としたとき、$\alpha : A \longrightarrow A'$ を準同型に対し、

$$\beta : B \longrightarrow B' \ , \ \gamma : C \longrightarrow C'$$

が存在し、次を可換とする。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "\gamma"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, dotted, "\beta"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

また、$\beta' : B \longrightarrow B'$, $\gamma' : C \longrightarrow C'$ が同じく上の図式を可換にすると、

$$D : B \longrightarrow C'$$

が存在し、$D \circ f = \gamma - \gamma'$ を満たす。

proof)　　g' が全射で B が自由であるから、

$$\beta : B \longrightarrow B'$$

が存在し $g' \circ \beta = \alpha \circ g$ を満たす。また、$g' \circ \beta \circ f = g \circ f = 0$ なので、$c \in C$ に対し、$\beta \circ f(c) \in \mathrm{Ker} g' = \mathrm{Im} f'$ であるので、

$$^{\exists} c' \in C' \qquad s.t \qquad f'(c') = \beta \circ f(c)$$

よって、$\gamma(c) = c'$ で定義すれば C が自由なので準同型となる。これにより、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が可換となる。これで前半の主張は終わりである。次に後半であるが、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma'"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta'"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

の可換図もなりたつとする。$b \in B$ に対し、

$$g'(\beta(b) - \beta'(b)) = g' \circ \beta(b) - g' \circ \beta'(b) = \alpha \circ g(b) - \alpha \circ g(b) = 0$$

なので、$\beta(b) - \beta'(b) \in \ker g' = \mathrm{Im} f'$ となり、

$$^{\exists}c' \in C' \qquad s.t \qquad f'(c') = \beta(b) - \beta'(b)$$

これより、$D : B \longrightarrow C'$ を $D(b) = c'$ で定義すれば B が自由なので準同型である。
よって、$f' \circ D(b) = \beta(b) - \beta'(b)$

$$f' \circ D \circ f(c) = \beta \circ f(c) - \beta' \circ f(c) = f' \circ \gamma(c) - f' \circ \gamma'(c) = f'(\gamma(c) - \gamma'(c))$$

f' が単射なので、$D \circ f(c) = \gamma(c) - \gamma'(c)$

□

Lemma 0.0.8

A を加群としたとき、その自由分解を

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

とする。このとき、加群 D に対し、

$$C \otimes D \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{g \otimes 1} A \otimes D \longrightarrow 0 \ , \ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, D) \xrightarrow{g^\sharp} \mathrm{hom}(B, D) \xrightarrow{f^\sharp} \mathrm{Hom}(C, D)$$

が完全であるが、$\mathrm{Ker}(f \otimes 1)$ あるいは、$\mathrm{Coker} f^\sharp$ は A の自由分解によらず同型を除いて一意に定まる。

proof)　　A の２通りの自由分解を

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0 \ \ , \ \ 0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} A \longrightarrow 0$$

としておく。このとき、Lemma 0.0.7 により、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

が可換になるような β, γ が存在する。同様の構成により、$\beta' : B' \longrightarrow B$, $\gamma' : C' \longrightarrow C$ が存在し

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\gamma'"'] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

が可換となる。ここで

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma' \circ \gamma"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta' \circ \beta"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

は可換で無論、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "="'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "="'] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

も可換である。Lemma 0.0.7 により、

$$D : B \longrightarrow C$$

が存在し、$D \circ f = \gamma' \circ \gamma - 1$ を満たす。この D を用いると、chain homotopic な chain map から誘導されたホモロジー、コホモロジー間の準同型が一致することを思い起こすと、

$$(\gamma \otimes 1)_* : \mathrm{Ker}(f \otimes 1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(f' \otimes 1)$$

となり、また

$$\gamma^\sharp : \mathrm{Coker} f'^\sharp \xrightarrow{\cong} \mathrm{Coker} f^\sharp$$

である。

Definition 0.0.9

加群 A を考えたとき、その自由分解

$$0 \longrightarrow A'' \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

を考えたとき、加群 B に対し、$\mathrm{Ker}(f \otimes 1)$ あるいは、$\mathrm{Coker} f^\sharp$ は A の自由分解によらないため、これは A, B のみ依存する。よって、

$$\mathrm{Tor}(A, B) = \mathrm{Ker}(f \otimes 1) \quad , \quad \mathrm{Ext}(A, B) = \mathrm{Coker} f^\sharp$$

とおく。

以下は基本的な計算結果である。R はアーベル群としておく。

Lemma 0.0.10

$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, R) \cong R$ である。

proof) $\alpha : \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, R) \longrightarrow R$ を $\alpha(f) = f(1)$ で定義すればこれが同型となる。

$\square$

Lemma 0.0.11

$$R \text{ が自由で、} m \geqq 1 \text{ のとき、} \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_m, R) = 0$$

proof) $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_m, R)$ とすると、

$$f : \mathbf{Z}_m \longrightarrow R$$

であるから、$[1] \in \mathbf{Z}_m$ に対し、$f[1] = r$ とおく。

$$mr = mf[1] = f[m] = f[0] = 0$$

であり、$m \geqq 1$ のとき、R は自由なので $r = 0$ である。

$\square$

Lemma 0.0.12

A, B, C を加群としたとき、

$$\mathrm{Hom}(A \oplus B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \oplus \mathrm{Hom}(B, C)$$

proof) $f : A \otimes B \longrightarrow C$ に対し、$(f_{|_A}, f_{|_B})$ を対応させればよい。

$\square$

Proposition 0.0.13

$\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}, R) = 0$

proof) $\mathbf{Z}$ の自由分解として、

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

が取れる。これにアーベル群 R を tensor すると、

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{1} R \longrightarrow 0$$

となる。これより、$\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}, R) = \mathrm{Ker}0 = 0$

$\square$

Proposition 0.0.14

$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}, R) = 0$

proof) $\mathbf{Z}$ の自由分解として、

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

これに、$\mathrm{Hom}(\quad, R)$ をとり、$\mathrm{Hom}(0, R) = 0$, $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, R) \cong R$ を考えば、

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{1} R \longrightarrow 0$$

となり、$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}, R) = \mathrm{Coker}0 = 0$

$\square$

Proposition 0.0.15

$$\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R) = 0$$

proof)　$\mathbf{Z}_m$ の自由分解は、

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{m} \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}_m \longrightarrow 0$$

として取れる。ただし、m は m 倍の準同型で、p は射影である。これに、R を tensor すれば、

$$R \xrightarrow{m} R \longrightarrow R \otimes \mathbf{Z}_m \longrightarrow 0$$

になり、m 倍写像 は単射なので、

$$\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R) = \mathrm{Ker} m = 0$$

□

Proposition 0.0.16

$$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}_m, R) = R_m$$

proof)　上と同じく $\mathbf{Z}_m$ の自由分解を、

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{m} \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}_m \longrightarrow 0$$

とする。$\mathrm{Hom}(\quad, R)$ をとれば、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_m, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, R)$$

であるが、$\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, R) \cong R$ を思いおこせば、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_m, R) \longrightarrow R \xrightarrow{m} R$$

となる。よって、$\mathrm{Im} m = mR$ なので、

$$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}_m, R) = \mathrm{Coker} m = R_m$$

□

Tor , Ext の分配性についても最後に見ておこう。

Proposition 0.0.17

A, B, C を加群とすると、

$$\mathrm{Tor}(A \oplus B, C) \cong \mathrm{Tor}(A, C) \oplus \mathrm{Tor}(B, C)$$

proof)　　A の自由分解 を、

$$0 \longrightarrow A'' \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

とし、B の自由分解を、

$$0 \longrightarrow B'' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} B \longrightarrow 0$$

としておけば、

$$0 \longrightarrow A'' \oplus B'' \xrightarrow{f \oplus f'} A' \oplus B' \xrightarrow{g \oplus g'} A \oplus B \longrightarrow 0$$

は $A \oplus B$ の自由分解である。ここに、C と tensor をとっても、

$$\begin{tikzcd}
(A'' \oplus B'') \otimes C \arrow[r, "(f \oplus f') \otimes 1"] \arrow[d, "\cong"'] & (A' \oplus B') \otimes C \arrow[r, "(g \oplus g') \otimes 1"] \arrow[d, "\cong"'] & (A \oplus B) \otimes C \arrow[d, "\cong"'] \\
(A'' \otimes C) \oplus (B'' \otimes C) \arrow[r, "(f \otimes 1) \oplus (f' \otimes 1)"'] & (A' \otimes C) \oplus (B' \otimes C) \arrow[r, "(g \otimes 1) \oplus (g' \otimes 1)"'] & (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)
\end{tikzcd}$$

が可換図であり

$$\mathrm{Tor}(A \oplus B, C) = \mathrm{Ker}((f \oplus f') \otimes 1) \cong \mathrm{Ker}((f \otimes 1) \oplus (f' \otimes 1)) = \mathrm{Tor}(A, C) \oplus \mathrm{Tor}(B, C)$$

□

Proposition 0.0.18

A, B, C を加群とすると、

$$\mathrm{Ext}(A \oplus B, C) \cong \mathrm{Ext}(A, C) \oplus \mathrm{Ext}(B, C)$$

proof)　Prop 0.0.17 と同じく A の自由分解 を、

$$0 \longrightarrow A'' \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

とし、B の自由分解を、

$$0 \longrightarrow B'' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} B \longrightarrow 0$$

としておけば、

$$0 \longrightarrow A'' \oplus B'' \xrightarrow{f \oplus f'} A' \oplus B' \xrightarrow{g \oplus g'} A \oplus B \longrightarrow 0$$

ここに、$\mathrm{Hom}(\quad, C)$ をとれば、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A \oplus B, C) \arrow[r, "(g \oplus g')^\sharp"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}(A' \oplus B', C) \arrow[r, "(f \oplus f')^\sharp"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}(A'' \oplus B'', C) \arrow[d, "\cong"'] \\
\mathrm{Hom}(A, C) \oplus \mathrm{Hom}(B, C) \arrow[r, "g^\sharp \oplus g'^\sharp"] & \mathrm{Hom}(A', C) \oplus \mathrm{Hom}(B', C) \arrow[r, "f^\sharp \oplus f'^\sharp"] & \mathrm{Hom}(A'', C) \oplus \mathrm{Hom}(B'', C)
\end{tikzcd}$$

であるから、

$$\mathrm{Ext}(A \oplus B, C) = \mathrm{Coker}((f \oplus f')^\sharp) \cong \mathrm{Coker}(f^\sharp \oplus f'^\sharp) = \mathrm{Ext}(A, C) \oplus \mathrm{Ext}(B, C)$$

□