では $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ について深く考察してみよう。双対になっているので大体は片方が成立すれば、もう一方も成立する。まずは Tor に限ってみてみよう。

Lemma 0.0.1

加群 A,B に対し、$\mathrm{Ext}^0(A,B)\cong \mathrm{Hom}(A,B)$

proof)　　A の射影的分解を (C,ε) とすると、

$$\mathrm{Ext}^0(A,B)=H^0(A;B)=\mathrm{Ker}\partial_1^\sharp$$

ところで、

$$C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

が完全であるため、前節の Lemma から

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B)\xrightarrow{\varepsilon^\sharp}\mathrm{Hom}(C_0,B)\xrightarrow{\partial_1^\sharp}\mathrm{Hom}(C_1,B)$$

が完全となる。よって、$\mathrm{Ker}(\partial_1^\sharp)=\mathrm{Im}(\varepsilon^\sharp)$ であるため、$\varepsilon^\sharp$ が単射なので、

$$\mathrm{Ext}^0(A,B)\cong\mathrm{Ker}\partial_1^\sharp=\mathrm{Im}(\varepsilon^\sharp)\cong\mathrm{Hom}(A,B)$$

□

Proposition 0.0.2

加群 B と短完全列

$$0\longrightarrow A'\xrightarrow{f}A\xrightarrow{g}A''\longrightarrow 0$$

において、次の長い完全列が存在する。

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}(A'',B)\longrightarrow\mathrm{Hom}(A,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}(A',B)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(A'',B)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Ext}^n(A'',B)\xrightarrow{g^*}\mathrm{Ext}^n(A,B)\xrightarrow{f^*}\mathrm{Ext}^n(A',B)\xrightarrow{\delta^*}\mathrm{Ext}^{n+1}(A'',B)\longrightarrow\cdots$$

proof)　　A',A'' の射影的分解を (C',ε)，(C'',ε'') とする。ここで、

$$(C,\partial)=(C'\oplus C'',\partial'\oplus\partial'')$$

とおくと、これは chain complex である。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_0' \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & C_0 \arrow[r, "j_0"] & C_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "g"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

の図式において上横列は分解する完全列である。ただし、

$$i_0 : C_0' \longrightarrow C_0 \quad , \quad j_0 : C_0 \longrightarrow C_0''$$

はそれぞれ inclusion と projection である。ここで、

$$\varepsilon : C_0 \longrightarrow A$$

を次で定義する。ここで、C_0'' が射影的加群なので、

$$\begin{tikzcd} C_0'' \arrow[rr, "\varepsilon''"] \arrow[dr, dotted, "h"'] & & A'' \\ & A \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする準同型 $h : C_0'' \longrightarrow A$ が存在する。よって、

$$\varepsilon(c', c'') = f \circ \varepsilon'(c') + h(c'')$$

で定義する。これより、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_0' \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & C_0 \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & C_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "g"'] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

は可換である。ε を調べると、$a \in A$ に対し、ε'' が全射なので $b \in C_0''$ が存在し、$\varepsilon''(b) = g(a)$ となる。j_0 の分解準同型、

$$k : C_0'' \longrightarrow C_0$$

に対し、$k(b) \in C_0$ を考えると、

$$g \circ \varepsilon \circ k(b) = \varepsilon'' \circ j_0 \circ k(b) = \varepsilon''(b) = g(a)$$

これより、$g(a-\varepsilon\circ k(b))=0$ なので、

$$a-\varepsilon\circ k(b)\in \mathrm{Ker}g=\mathrm{Im}f$$

これより $a'\in A'$ が存在し、$f(a')=a-\varepsilon\circ k(b)$ である。また ε' が全射なので、$b'\in C'_0$ が存在し $\varepsilon'(b')=a'$ を満たす。$i_0(b')+k(b)\in C_0$ に対し、

$$\varepsilon(i_0(b')+k(b))=\varepsilon(b',0)+\varepsilon\circ k(b)=f\circ\varepsilon'(b')+\varepsilon\circ k(b)=f(a')+\varepsilon\circ k(b)=a$$

であるため ε は全射である。これより、加群の列

$$\cdots\longrightarrow C_n\xrightarrow{\partial_n}C_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0\xrightarrow{\varepsilon}A\longrightarrow 0$$

が誕生するわけだが、ここで完全性が疑われるのが $C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0\xrightarrow{\varepsilon}A$ の部分である。しかし今、

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\partial'_1"'] & C_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\partial_1"'] & C''_1 \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & C_0 \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & C''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "g"'] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の可換図で、すべての横列と両側縦列は完全であるため俗に言う 3×3Lemma の応用によって、中央列も完全となることがわかる。これより、(C,ε) は A の射影的分解である。また、

$$0\longrightarrow C'\xrightarrow{i}C\xrightarrow{j}C''\longrightarrow 0$$

は分解する短完全列なので、B との Hom をとっても、

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(C'',B)\xrightarrow{j^\sharp}\mathrm{Hom}(C,B)\xrightarrow{i^\sharp}\mathrm{Hom}(C',B)\longrightarrow 0$$

は完全であることがわかるので、これより長いコホモロジー群の完全列を取れば、

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(A'',B)\longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B)\longrightarrow \mathrm{Hom}(A',B)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(A'',B)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Ext}^n(A'',B)\xrightarrow{g^*}\mathrm{Ext}^n(A,B)\xrightarrow{f^*}\mathrm{Ext}^n(A',B)\xrightarrow{\delta^*}\mathrm{Ext}^{n+1}(A'',B)\longrightarrow\cdots$$

が誕生する。

$\square$

Proposition 0.0.3

単項イデアル整域上の加群 A, B においては、$n \geqq 2$ において $\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$

proof)　　A の射影的分解 (C, ε) に対し、$\mathrm{Ker}\varepsilon$ が自由となるため、

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\varepsilon \hookrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

も A の射影的分解となる。これは $n \geqq 2$ では 0 なので、B と Hom をとっても 0 である。よって、$n \geqq 2$ においては、$\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$

$\square$

Proposition 0.0.4

A, B を加群とする。A が射影的加群ならば、$n \geqq 1$ において $\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$

proof)　　A が射影的加群ならば、

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{1} A \longrightarrow 0$$

が A の射影的分解となる。これは $n \geqq 1$ では 0 なので、B と Hom をとっても 0 である。よって、$n \geqq 1$ においては、$\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$

$\square$