では前節の議論をさらに拡張してみよう。前節の議論の中核にあったのは単項イデアル整域という過程であった。これをはずすと一体どういうことになるか。それには加群の自由分解を少し変えなければならない。

Definition 0.0.1

加群 A が射影的加群であるとは、任意の加群 B, C と準同型 $f : A \longrightarrow C$ と、全準同型 $g : B \longrightarrow C$ において、

$$h : A \longrightarrow B$$

で、$g \circ h = f$ を満たす準同型が存在することである。つまり、次の図式が可換になるということである。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "h"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g\text{:suj}"'] & \end{tikzcd}$$

Remmark 0.0.2

A が自由加群であるならば、射影的加群である。

proof)　　加群 B, C と準同型 $f : A \longrightarrow C$ と、全準同型 $g : B \longrightarrow C$ において、$a \in A$ を A の基底とする。$f(a) \in C$ で g が全射なので、

$$^{\exists}b \in B \qquad s.t \qquad g(b) = f(a)$$

なので、$h : A \longrightarrow B$ を $h(a) = b$ で定義すれば、A が自由なので h が準同型となる。

$\square$

Lemma 0.0.3

加群 A に関して次の条件は同値である。

1. A は射影的加群である。
2. 任意の短完全列 $0 \longrightarrow A'' \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow 0$ は分解する。
3. A は自由加群の直和因子である。

proof)　　1) $\Longrightarrow$ 2) を示す。任意の短完全列、

$$0 \longrightarrow A'' \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

において、g は全射である。A が射影的加群なので、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "="] \arrow[dr, dotted, "h"'] & & A \\ & A' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする $h: A \longrightarrow A'$ が存在する。つまりこれが分解準同型である。

2) $\Longrightarrow$ 3) を示す。短完全列、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\varepsilon \hookrightarrow F(A) \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

が分解するとする。$F(A) \cong A \oplus \mathrm{Ker}\varepsilon$ なので $F(A)$ が自由であるから、A は自由加群の直和因子である。

3) $\Longrightarrow$ 1) を示す。加群 B, C と準同型 $f: A \longrightarrow C$ と、全準同型 $g: B \longrightarrow C$ において、加群 D が存在し、$A \oplus D$ が自由であるとする。g が全射で $A \oplus D$ が自由だから、

$$\begin{tikzcd} A \oplus D \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

を可換とする $h: A \oplus D \longrightarrow B$ が存在する。よって、準同型

$$h': A \longrightarrow B$$

が、$h'(a) = h(a, 0)$ で定義され、

$$g \circ h'(a) = g \circ h(a, 0) = f(a)$$

であるため、A は射影的加群であることがわかる。

□

Proposition 0.0.4

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ が完全とする。D が射影的加群ならば、

$$A \otimes D \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes D$$

も完全である。

proof)　　D が自由ならば前節で示したとおりである。だが基本的にはそれほど変わりない。Lemma 0.0.3 により、加群 E が存在し、$D \oplus E$ が自由となる。よって、

$$A \otimes (D \oplus E) \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes (D \oplus E) \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes (D \oplus E)$$

は完全である。つまり、

$$(A \otimes D) \oplus (A \otimes E) \overset{(f\otimes1)\oplus(f\otimes1)}{\longrightarrow} (B \otimes D) \oplus (B \otimes E) \overset{(g\otimes1)\oplus(g\otimes1)}{\longrightarrow} (C \otimes D) \oplus (C \otimes E)$$

が完全となる。ここから、

$$A \otimes D \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes D$$

の列における $\mathrm{Ker}(g \otimes 1) \subset \mathrm{Im}(f \otimes 1)$ が導けるため完全となる。

$\square$

Lemma 0.0.5

A, B が射影的加群であるならば、$A \oplus B$ も射影的加群である。

proof)　　加群 C, D と準同型 $f : A \oplus B \longrightarrow D$ と、全準同型 $g : C \longrightarrow D$ において

$$f_{|_A} : A \longrightarrow D \ , \ f_{|_B} : B \longrightarrow D$$

においてそれぞれ、射影的加群の性質から、

$$h_A : A \longrightarrow C \ , \ h_B : B \longrightarrow C$$

が得られて $h = h_A \oplus h_B : A \oplus B \longrightarrow C$ が得られ $g \circ h = f$ である。

$\square$

Definition 0.0.6

A を加群とし、C を負次数は 0 である chain complex で各 C_n が射影的加群とする。このような C と準同型、

$$\varepsilon : C_0 \longrightarrow A$$

が与えられ、

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

が完全列となるとき、この完全列、あるいは (C, ε) の組を A の射影的分解と呼ぶ。

Theorem 0.0.7

任意の加群 A に対し、A の射影的分解が存在する。

proof)　　A から生成される自由加群 $F(A) = C_0$ とすれば、全射

$$\varepsilon : C_0 \longrightarrow A$$

が定まる。一般には $\mathrm{Ker}\varepsilon$ が自由とは限らないので、$F(\mathrm{Ker}\varepsilon) = C_1$ とおいて、inclusion を拡張して準同型、

$$\partial_1 : C_1 \longrightarrow C_0$$

が構成される。$\mathrm{Ker}\varepsilon = \mathrm{Im}\partial_1$ である。よってこの構成を繰り返すと、A の射影的分解、

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

が得られる。

$\square$

Remmark 0.0.8

A の射影的分解は一意ではない。

proof)　　A の射影的分解を、

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

とし、勝手な射影的加群 B をとり、

$$\cdots \longrightarrow C_3 \oplus B \xrightarrow{\partial_3 \oplus 1} C_2 \oplus B \xrightarrow{\partial_2 \oplus 0} C_1 \oplus B \xrightarrow{\partial_1 \oplus 1} C_0 \oplus B \xrightarrow{\varepsilon_p} A \longrightarrow 0$$

とすればこれも A の射影的分解となる。

$\square$

Proposition 0.0.9

A, A' の射影的分解をそれぞれ、(C, ε) , (C', ε') とする。とする。このとき、$f : A \longrightarrow A'$ を準同型とすると、chain map

$$\varphi : C \longrightarrow C'$$

が存在し、$\varepsilon' \circ \varphi_0 = f \circ \varepsilon$ を満たす。また、このような φ は chain homotopic を除いて一意に存在する。

proof)　$\varphi_0 : C_0 \longrightarrow C'_0$ は、

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & A \arrow[d, "f"] \\ C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & A' \end{tikzcd}$$

の図式で C_0 が射影的加群、ε' が全射であるから、

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\varphi_0"'] & A \arrow[d, "f"] \\ C'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & A' \end{tikzcd}$$

を可換にするように φ_0 が存在する。以下帰納的に $0 \leqq m \leqq n-1$ まで、$\varphi_m : C_m \longrightarrow C'_m$ が存在し、

$$\begin{tikzcd} C_m \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, "\varphi_m"'] & C_{m-1} \arrow[d, "\varphi_{m-1}"] \\ C'_m \arrow[r, "\partial'_m"'] & C'_{m-1} \end{tikzcd}$$

を満たすと仮定する。このとき、

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] \\ C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"'] & C'_{n-2} \end{tikzcd}$$

を考えると、残念ながら各 ∂'_n が全射とは限らないので素直には射影的加群の性質は使えない。よって次のようなことを考える。

$$\partial'_{n-1} \circ \varphi_{n-1} \circ \partial_n = \varphi_{n-2}\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

であるため、

$$\varphi_{n-1} \circ \partial_n(C) \subset \mathrm{Ker}\partial'_{n-1} = \mathrm{Im}\partial'_n$$

である。よって、C'_{n-1} を $\mathrm{Im}\partial'_n$ に変える。

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] \\
C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & \mathrm{Im}\partial'_n \arrow[r, "\partial'_{n-1}"'] & C'_{n-2}
\end{tikzcd}$$

今度は ∂'_n は全射と考えられる。C_n が射影的加群だから、

$$\varphi_n : C_n \longrightarrow C'_n$$

が存在して、

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] \\
C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & \mathrm{Im}\partial'_n \arrow[r, "\partial'_{n-1}"'] & C'_{n-2}
\end{tikzcd}$$

を可換とする。つまり、

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] \\
C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r, "\partial'_{n-1}"'] & C'_{n-2}
\end{tikzcd}$$

が可換になる。これより、chain map となる $\varphi = \{\varphi_n\}$ が構成できる。後半の主張は前節を参照のこと。

$\square$

Corollary 0.0.10

A の射影的分解 (C, ε) と、加群 B に対し、chain complex$C \otimes B$, $\mathrm{Hom}(C, B)$ から定義されるホモロジー群、コホモロジー群は A の射影的分解によらず同型をのぞいて一意に定まる。

Definition 0.0.11

Corollary 0.0.10 により、加群 A の射影的分解 (C,ε) と加群 B を考える。

$C\otimes B$ から定義されるホモロジー群 $H_n(C\otimes B)$、つまり C の B を係数とするホモロジー群 $H_n(C;B)$ は A と B のみに依存するため、これを $\mathrm{Tor}_n(A,B)$ と書き、A の B による n 次 トーション群と呼ぶ。

また、$\mathrm{Hom}(C,B)$ から定義されたコホモロジー群 $H^n(\mathrm{Hom}(C,B))$、つまり C の B を係数とするコホモロジー群 $H^n(C;B)$ は A と B のみに依存するため、これを $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ と書き、A の B による n 次エクステンション群と呼ぶ。

$n=1$ のとき前節で定義した $\mathrm{Tor}(A,B),\mathrm{Ext}(A,B)$ との整合性を確かめてみよう。

Remmark 0.0.12

単項イデアル整域上の加群 A,B においては、

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}\varepsilon \hookrightarrow F(A)\xrightarrow{\varepsilon} A\longrightarrow 0$$

は A の自由分解であり、かつ 0 を右に伸ばせば射影的分解でもある。よってこのことから、Def 0.0.11 における $n=1$ の場合は、前節の $\mathrm{Tor}(A,B)=\mathrm{Tor}_1(A,B)$, $\mathrm{Ext}(A,B)=\mathrm{Ext}^1(A,B)$ となる。

では $\mathrm{Tor}_n(A,B)$ と $\mathrm{Ext}^n(A,B)$ について深く考察してみよう。双対になっているので大体は片方が成立すれば、もう一方も成立する。まずは Tor に限ってみてみよう。

Lemma 0.0.13

加群 A,B に対し、$\mathrm{Tor}_0(A,B)\cong A\otimes B$

proof)　　A の射影的分解を (C,ε) とすると、

$$\mathrm{Tor}_0(A,B)=H_0(C\otimes B)=C_0\otimes B/\mathrm{Im}(\partial_1\otimes 1)$$

ところで、

$$C_1\xrightarrow{\partial_1} C_0\xrightarrow{\varepsilon} A\longrightarrow 0$$

が完全であるため、前節の Lemma から

$$C_1\otimes B\xrightarrow{\partial_1\otimes 1} C_0\otimes B\xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} A\otimes B\longrightarrow 0$$

が完全となる。よって、$\mathrm{Im}(\partial_1 \otimes 1) = \mathrm{Ker}(\varepsilon \otimes 1)$ であるため、

$$\mathrm{Tor}_0(A, B) \cong C_0 \otimes B / \mathrm{Ker}(\varepsilon \otimes 1) \cong \mathrm{Im}(\varepsilon \otimes 1) = A \otimes B$$

□

Proposition 0.0.14

加群 A と短完全列

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$$

において、次の長い完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_n(A, B) \xrightarrow{(1\otimes f)_*} \mathrm{Tor}_n(A, C) \xrightarrow{(1\otimes g)_*} \mathrm{Tor}_n(A, D) \xrightarrow{\partial_*} \mathrm{Tor}_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A, D) \xrightarrow{\partial_*} A \otimes B \xrightarrow{1\otimes f} A \otimes C \xrightarrow{1\otimes g} A \otimes D \longrightarrow 0$$

proof)　　A の射影的分解 (E, ε) に対し、各 E_n は射影的加群であるから、

$$0 \longrightarrow E_n \otimes B \xrightarrow{1\otimes f} E_n \otimes C \xrightarrow{1\otimes g} E_n \otimes D \longrightarrow 0$$

は完全となる。つまり、$0 \longrightarrow E \otimes B \xrightarrow{1\otimes f} E \otimes C \xrightarrow{1\otimes g} E \otimes D \longrightarrow 0$ が chain complex の完全列なので、このホモロジー群の長い完全列をとれば求められる。

□

Proposition 0.0.15

単項イデアル整域上の加群 A, B においては、$n \geqq 2$ において $\mathrm{Tor}_n(A, B) = 0$

proof)　　A の射影的分解 (C, ε) に対し、$\mathrm{Ker}\varepsilon$ が自由となるため、

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\varepsilon \hookrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

も A の射影的分解となる。これは $n \geqq 2$ では 0 なので、B と tensor をとっても 0 である。よって、$n \geqq 2$ においては、$\mathrm{Tor}_n(A, B) = 0$

□

Proposition 0.0.16

A, B を加群とする。A または B が射影的加群ならば、$n \geqq 1$ において $\mathrm{Tor}_n(A,B)=0$

proof)　　B を射影的加群とする。A の射影的分解 (C,ε) としたとき、

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}\otimes B \xrightarrow{\partial_{n+1}\otimes 1} C_n \otimes B \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \otimes B \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1} C_0 \otimes B$$

は、完全となるためこのホモロジー群が $\mathrm{Tor}_*(A,B)$ であったことを思い出せば、$n \geqq 1$ において $\mathrm{Tor}_n(A,B)=0$ である。逆に A を自由とすると、次に示すように $\mathrm{Tor}_*(A,B) \cong \mathrm{Tor}_*(B,A)$ なので今の議論に立ち戻る。

$\square$

Proposition 0.0.17

加群 A, B に対し、$\mathrm{Tor}_*(A,B) \cong \mathrm{Tor}_*(B,A)$ である。

proof)　　$n<0$ のときは明らかである。$A\otimes B \cong B \otimes A$ であるため、$n=0$ のときも成立する。とりあえず、A の射影的分解を (C,ε) とし、B の射影的分解を (C',ε') とする。また、$A' = \mathrm{Im}\partial_1 = \mathrm{Ker}\varepsilon \subset C_0$, $B' = \mathrm{Im}\partial'_1 = \mathrm{Ker}\varepsilon' \subset C'_0$ としておこう。このとき、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A,B) \longrightarrow A'\otimes B \longrightarrow C_0 \otimes B \longrightarrow A\otimes B \longrightarrow$$

が完全であることを示したい。$\mathrm{Tor}_1(A,B)$ の定義から当たり前と思うかもしれないが、それは A' が射影的加群であればの話だ。残念ながら、

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{j} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

は射影的分解とはいいがたい。よって、面倒だが自力で $\mathrm{Ker}(j\otimes 1)$ を調べて見る必要がある。

$$f : C_1 \longrightarrow A'$$

を ∂_1 から導かれる全射準同型とする。

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{f} A' \longrightarrow 0$$

が完全となるため、

$$C_2 \otimes B \xrightarrow{\partial_2\otimes 1} C_1 \otimes B \xrightarrow{f\otimes 1} A'\otimes B \longrightarrow 0$$

が完全となる。ここで、$\mathrm{Im}(\partial_2 \otimes 1) = \mathrm{Ker}(f \otimes 1)$ により、

$$f_1 : \mathrm{Tor}_1(A, B) = \mathrm{Ker}(\partial_1 \otimes 1)/\mathrm{Im}(\partial_2 \otimes 1) \hookrightarrow C_1 \otimes B/\mathrm{Ker}(f \otimes 1) \xrightarrow{\cong} A' \otimes B$$

が定義される。これは単射準同型である。ちなみに最後の同型は $f \otimes 1$ からの誘導である。また、

$$\partial_1 \otimes 1 : C_1 \otimes B \longrightarrow C_0 \otimes B$$

から、単射準同型

$$(\partial_1 \otimes 1)' : C_1 \otimes \longrightarrow B/\mathrm{Ker}(\partial_1 \otimes 1) \longrightarrow C_0 \otimes B$$

が導かれる。また恒等射 $C_1 \otimes B \longrightarrow C_1 \otimes B$ からは、

$$i : C_1 \otimes B/\mathrm{Im}(\partial_2 \otimes 1) \longrightarrow C_1 \otimes B/\mathrm{Ker}(\partial_1 \otimes 1)$$

がそれぞれ導かれる。これらを用いて次の可換図を考える。

$$\begin{tikzcd}
C_1 \otimes B/\mathrm{Im}(\partial_2 \otimes 1) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i"'] & A' \otimes B \arrow[d, "j\otimes 1"] \\
C_1 \otimes B/\mathrm{Ker}(\partial_1 \otimes 1) \arrow[r, "(\partial_1\otimes 1)'"'] & C_0 \otimes B
\end{tikzcd}$$

ここで、$\mathrm{Ker}i = \mathrm{Ker}(\partial_1 \otimes 1)/\mathrm{Im}(\partial_2 \otimes 1) = \mathrm{Tor}_1(A, B)$ であるため、可換図をもっと拡張すれば、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}i \arrow[r, "="] \arrow[d, "\cap"'] & \mathrm{Ker}i \arrow[r, "="] \arrow[d, "\cap"'] & \mathrm{Tor}_1(A, B) \arrow[d, "f_1"] \\
C_1 \otimes B/\mathrm{Ker}(f \otimes 1) \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"'] & C_1 \otimes B/\mathrm{Im}(\partial_2 \otimes 1) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i"'] & A' \otimes B \arrow[d, "j\otimes 1"] \\
C_1 \otimes B/\mathrm{Ker}(\partial_1 \otimes 1) \arrow[r, "="] & C_1 \otimes B/\mathrm{Ker}(\partial_1 \otimes 1) \arrow[r, "(\partial_1\otimes 1)'"'] & C_0 \otimes B
\end{tikzcd}$$

中央の縦列は完全であり、右下は単射なので、右の縦列も完全となる。よって、f_1 が単射であることも踏まえれば、

$$\ker(j \otimes 1) = \mathrm{Im}f_1 \cong \mathrm{Tor}_1(A, B)$$

が言えるため、目的の完全列、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A,B) \longrightarrow A' \otimes B \longrightarrow C_0 \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow$$

をえる。また、

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{j} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

が完全なんで、B において Prop 0.0.14 を考えれば、次の完全列がある。

$$\mathrm{Tor}_1(B,C_0) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(B,A) \longrightarrow B \otimes A' \longrightarrow B \otimes C_0 \longrightarrow B \otimes A \longrightarrow 0$$

C_0が射影的加群であるため、$\mathrm{Tor}_1(B,C_0) = 0$。この二つの完全列を組み合わせれば、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(A,B) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & A' \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & C_0 \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes B \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(B,A) \arrow[r] & B \otimes A' \arrow[r] & B \otimes C_0 \arrow[r] & B \otimes A
\end{tikzcd}$$

の可換図から自然と可換図を保つように、$\mathrm{Tor}_1(A,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(B,A)$ が誘導させ、上下列が完全であるため Five Lemma によりこれが同型となる。よって長くなったが、$n = 1$ の場合も成立する。これより $n \geqq 2$ に対し、$0 \leqq m \leqq n-1$ の範囲で、

$$\mathrm{Tor}_m(A,B) \cong \mathrm{Tor}_m(B,A)$$

が成立するとする。このとき、次の二つの短完全列、

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow C_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow C_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

から、上の列は A, 下の列は B' に関して Prop 0.0.14 を用いれば、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n(A,C_0) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_n(A,B) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{n-1}(A,B') \arrow[r] \arrow[dl, "\cong"'] & \mathrm{Tor}_{n-1}(A,C_0) \\
\mathrm{Tor}_{n-1}(B',C_0') \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{n-1}(B',A) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{n-2}(B',A') \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{n-1}(B',C_0)
\end{tikzcd}$$

の図式で、上下とも両端は 0 だから、

$$\mathrm{Tor}_n(A,B) \cong \mathrm{Tor}_{n-1}(A,B') \cong \mathrm{Tor}_{n-1}(B',A) \cong \mathrm{Tor}_{n-2}(B',A')$$

さらに、先ほどの二つの完全列で今度は上列は A'、下列は B に関して Prop 0.0.14 の完全列より、同じようにして、

$$\mathrm{Tor}_n(B, A) \cong \mathrm{Tor}_{n-1}(B, A') \cong \mathrm{Tor}_{n-1}(A', B) \cong \mathrm{Tor}_{n-2}(A', B')$$

が得られ、仮定より $\mathrm{Tor}_{n-2}(A', B') \cong \mathrm{Tor}_{n-2}(B', A')$ であるため、

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) \cong \mathrm{Tor}_n(B, A)$$

が成立する。

□