以前、普遍係数定理を紹介したときは、いろいろと条件を限定して簡略な形で述べたが、実際には次の一般形がある。証明は以前とほぼ変わらないと思うので、そちらを参照してほしい。以下で M は R 加群 とする。

Theorem 0.0.1 （普遍係数定理）

位相空間対 (X, A) で R が単項イデアル整域ならば、次の分解する完全列が存在する。

$$0 \longrightarrow H_n(X,A) \otimes M \longrightarrow H_n(X,A;M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X,A),M) \longrightarrow 0$$

この定理の主張は $H_n(X,A;M)$ と $H_n(X,A) \otimes M$ がどれほど似通っているかをあらわしている。完全列が分解するため、

$$H_n(X,A;M) \cong (H_n(X,A) \otimes M) \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X,A),M)$$

となるわけだが、後ろの $\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X,A),M)$ が邪魔である。というわけで例えば、次のようなことが成り立つ。

Corollary 0.0.2

位相空間対 (X, A)、R が単項イデアル整域で、$H_{n-1}(X,A)$ が自由ならば、

$$H_n(X,A;M) \cong H_n(X,A) \otimes M$$

この双対として次の形がある。これが俗に言われている普遍係数定理で、ホモロジーとコホモロジーに関する定理である。

Theorem 0.0.3 （普遍係数定理）

位相空間対 (X, A) で R が単項イデアル整域ならば、次の分解する完全列が存在する。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X,A),M) \longrightarrow H^n(X,A;M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X,A),M) \longrightarrow 0$$

完全列が分解するということは、次の同型がある。

Corollary 0.0.4

位相空間対 (X, A) で R が単項イデアル整域ならば、

$$H^n(X, A; M) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X, A), M) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X, A), M)$$

Corollary 0.0.5

位相空間対 (X, A)、R が単項イデアル整域で、$H_{n-1}(X, A)$ が自由ならば、

$$H^n(X, A; M) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X, A), M)$$

これら普遍係数定理の一般として $K\ddot{u}nneth$ の定理がある。

Theorem 0.0.6 （$K\ddot{u}nneth$ の定理）

(X, A) と (Y, B) が位相空間対で R が単項イデアル整域ならば、次の分解する完全列が存在する。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(X, A) \otimes H_q(Y, B; M) \longrightarrow H_n(X \times Y, X \times B \cup A \times Y; M)$$

$$\longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1(H_p(X, A), H_q(Y, B; M)) \longrightarrow 0$$

Remmark 0.0.7

上記の $K\ddot{u}nneth$ の定理において Y を一点空間とすれば普遍係数定理と一致する。