ホモロジー群と関係深いものにコホモロジー群というものがある。定義はホモロジー群に似ているところがあって、ホモロジー群で成り立つ諸定理が同じようにして成り立つので、このコホモロジー群というやつはその存在も重要性も忘れ去られがちです。

まずは群の「双対」と呼ばれる概念を考える。本当は R 加群で考えるのが一般的なのだが、ホモロジー群の係数でも $\mathbf{Z}$ で考えていたため、ここでも $\mathbf{Z}$ で考えよう。

Definition 0.0.1

A, B : アーベル群に対し、

$$\mathrm{Hom}(A, B) = \{\ f : A \longrightarrow B \mid f : \text{準同型}\ \}$$

で定義し、$f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ に対し、$f + g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ を、

$$f + g(a) = f(a) + g(a)$$

で定義すれば、$\mathrm{Hom}(A, B)$ はアーベル群となる。

Definition 0.0.2

A, A', B : アーベル群、

$$\varphi : A \longrightarrow A' \quad \text{準同型}$$

に対し、

$$\varphi^\sharp : \mathrm{Hom}(A', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B)$$

を次で定義する。

$$\varphi(f) = f \circ \varphi$$

これにより、$\varphi^\sharp : \mathrm{Hom}(A', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B)$ は準同型となる。

Lemma 0.0.3

A, A', B : アーベル群、

$$0 : A \longrightarrow A' \quad 0\ \text{準同型}$$

に対し、

$$0^\sharp : \mathrm{Hom}(A', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \quad \text{は}\ 0\ \text{準同型}$$

proof)　$f \in \mathrm{Hom}(A', B)$ に対し、

$$0^\sharp(f) = f \circ 0 = 0$$

$\therefore$　$0^\sharp$は 0 準同型である。

$\square$

Lemma 0.0.4

A, B : アーベル群、

$$1 : A \longrightarrow A$$

に対し、

$$1^\sharp : \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \quad \text{は恒等写像}$$

proof)　$f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ に対し、

$$1^\sharp(f) = f \circ 1 = f$$

$\therefore$　$1^\sharp$は恒等写像である。

$\square$

Lemma 0.0.5

A, A', A'', B : アーベル群、

$$\varphi : A \longrightarrow A' \quad , \quad \chi : A' \longrightarrow A''$$

に対し、

$$(\chi \circ \varphi)^\sharp = \varphi^\sharp \circ \chi^\sharp : \mathrm{Hom}(A'', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B)$$

proof)　$f \in \mathrm{Hom}(A'', B)$ に対し、

$$\varphi^\sharp \circ \chi^\sharp(f) = \varphi^\sharp(f \circ \chi) = f \circ \chi \circ \varphi = (\chi \circ \varphi)^\sharp(f)$$

$\therefore$　$(\chi \circ \varphi)^\sharp = \varphi^\sharp \circ \chi^\sharp$

$\square$

Remmark 0.0.6

B : アーベル群に対し、

$$\mathrm{Hom}_B : Abel \longrightarrow Abel$$

は反変関手。（ただし、$\mathrm{Hom}_B(A) = \mathrm{Hom}(A, B)$, $\mathrm{Hom}(\varphi) = \varphi^\sharp$）

Definition 0.0.7

A : アーベル群に対し、

$$A^\sharp = \mathrm{Hom}(A, \mathbf{Z})$$

で定義し、A の双対と呼ぶ。

さて、ホモロジー群のお話を思い出そう。ホモロジー群は通常どういう形で定義するかというと chain complex から構成するのが普通である。ところで、chain complex は次数つきの群とそこから 1 次づつ次数を下げて、2 回合成すると 0 になる準同型の列だった。

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

において、$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ のとき、(C, ∂) を chain complex と呼んだ。

Lemma 0.0.8

chain complex (C, ∂)

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

に対し、その双対を考えると、

$$\cdots \xrightarrow{(\partial_{n-1})^\sharp} (C_{n-1})^\sharp \xrightarrow{(\partial_n)^\sharp} (C_n)^\sharp \xrightarrow{(\partial_{n+1})^\sharp} (C_{n+1})^\sharp \xrightarrow{(\partial_{n+2})^\sharp} \cdots$$

の列が構成できるが、表記としてこのままでは次数が上がってしまうので、

$$(C_n)^\sharp = C^\sharp_{-n} \quad , \quad (\partial_n)^\sharp = \partial^\sharp_{-n+1}$$

と置き換えれば、

$$\cdots \xrightarrow{\partial^\sharp_{-(n-2)}} C^\sharp_{-(n-1)} \xrightarrow{\partial^\sharp_{-(n-1)}} C^\sharp_{-n} \xrightarrow{\partial^\sharp_{-n}} C^\sharp_{-(n+1)} \xrightarrow{\partial^\sharp_{-(n+1)}} \cdots$$

このとき $(C^\sharp, \partial^\sharp)$ は chain complex である。

proof) $\qquad (\partial_{n+1})^\sharp \circ (\partial_n)^\sharp = (\partial_n \circ \partial_{n+1})^\sharp = 0^\sharp = 0$

□

Definition 0.0.9

(C, ∂) : chain complex の双対 $(C^\sharp, \partial^\sharp)$ から構成されるホモロジー群

$$H_{-n}(C^\sharp) = H^n(C)$$

と書き、C の n 次元コホモロジー群と呼ぶ。まとめて、$H^*(C)$ とも書く。

Lemma 0.0.10

C, D : chain complex , $\varphi : C \longrightarrow D$ chain map に対し、

$$\varphi^\sharp : D^\sharp \longrightarrow C^\sharp \quad \text{は chain map}$$

proof) $n \in \mathbf{Z}$ に対し、$\varphi_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ \varphi_n$ である。

$$\therefore \quad (\partial_n^C)^\sharp \circ (\varphi_{n-1})^\sharp = (\varphi_n)^\sharp \circ (\partial_n^D)^\sharp$$

これより、$(\varphi_n)^\sharp = \varphi^\sharp_{-n}$ と置き換えれば、

$$(\partial^\sharp_{-(n-1)})^C \circ \varphi^\sharp_{-(n-1)} = \varphi^\sharp_{-n} \circ (\partial^\sharp_{-(n-1)})^D$$

よって $\varphi^\sharp : D^\sharp \longrightarrow C^\sharp$ は chain map である。

□

Definition 0.0.11

C, D : chain complex , $\varphi : C \longrightarrow D$ chain map に対し、

$$\varphi^* : H^*(D) \longrightarrow H^*(C)$$

が誘導される。

Lemma 0.0.12

C, D : chain complex , $f, g : C \longrightarrow D$ chain map が chain homotopic の時、

$$f^\sharp, g^\sharp : D^\sharp \longrightarrow C^\sharp \quad \text{は chain homotopic}$$

proof)　$n \in \mathbf{Z}$ に対し、

$$^{\exists}H_n : C_n \longrightarrow D_{n+1} \qquad s.t \qquad \partial^D_{n+1} \circ H_n + H_{n-1} \circ \partial^C_n = f_n - g_n$$

ここで、

$$(H_n)^\sharp : D^\sharp_{-(n+1)} \longrightarrow C^\sharp_{-n}$$

であり、$(H_n)^\sharp = H^\sharp_{-(n+1)}$ とおくことにする。

$$(\partial^D_{n+1} \circ H_n + H_{n-1} \circ \partial^C_n)^\sharp = (f_n - g_n)^\sharp$$

これを整理すると、

$$(\partial^\sharp_{-(n-1)})^C \circ H^\sharp_{-n} + H^\sharp_{-(n+1)} \circ (\partial^\sharp_{-n})^D = f^\sharp_{-n} - g^\sharp_{-n}$$

であるため、$f^\sharp \simeq g^\sharp$

□

Lemma 0.0.13

$\mathbf{Z}^\sharp \cong \mathbf{Z}$

proof)　$f : \mathbf{Z}^\sharp \longrightarrow \mathbf{Z}$ を $f(x) = x(1)$ で定義する。

$$f(x) = 0 \text{ とすると、} x(1) = 0$$

ここで、$n \in \mathbf{Z}$ に対し、$x(n) = n \cdot x(1) = 0$

よって、$x = 0$ なので、f は単射。

また、$a \in \mathbf{Z}$ に対し、$y : Z \longrightarrow Z$ を $y(b) = ab$ で定義する。

$$f(y) = y(1) = a$$

であるので、f は全射である。これより、f は同型である。

□

Proposition 0.0.14

$B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$: exact ならば、

$$0 \longrightarrow C^\sharp \xrightarrow{g^\sharp} A^\sharp \xrightarrow{f^\sharp} B^\sharp : \text{exact}$$

proof)　　まず $g^\sharp$ が単射であることを示す。$x \in C^\sharp$ に対し、

$$g^\sharp(x) = 0 \quad \text{と仮定する。つまり、} x \circ g = 0$$

ここで、$c \in C$ に対し、g が全射であるため、

$$^\exists a \in A \qquad s.t \qquad g(a) = c$$

よって、$x(c) = x \circ g(a) = 0$ なので、$x = 0$

これより、$g^\sharp$は単射である。

また、$f^\sharp \circ g^\sharp = (g \circ f)^\sharp = 0^\sharp = 0$。さらに、

$$y \in A^\sharp \text{に対し、} \quad f^\sharp(y) = 0 \quad \text{とする。つまり、} y \circ f = 0$$

ここで、$y : A \longrightarrow \mathbf{Z}$, $g : A \longrightarrow C$ が全射であり、

$$y(\mathrm{Ker} g) = y(\mathrm{Im} f) = 0$$

であるので、$^\exists \tilde{y} : C \longrightarrow \mathbf{Z} \qquad s.t \qquad \tilde{y} \circ g = y$

$$\therefore \qquad \tilde{y} \in C^\sharp \text{であり、} g^\sharp(\tilde{y}) = y$$

よって、$0 \longrightarrow C^\sharp \xrightarrow{g^\sharp} A^\sharp \xrightarrow{f^\sharp} B^\sharp$: exact

□

Remmark 0.0.15

$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$: exact であっても、

$$0 \longrightarrow C^\sharp \xrightarrow{g^\sharp} A^\sharp \xrightarrow{f^\sharp} B^\sharp \longrightarrow 0 : \text{exact} \text{ とは限らない。}$$

つまり、$f^\sharp$ は全射とは限らない。

Example 0.0.16

$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{m} \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \longrightarrow 0$: exact であるが、$m^\sharp$は全射ではない。

(ただし、m は m 倍写像。p は射影である。)

proof)　　Lemma 0.0.13 より、$\mathbf{Z}^\sharp \cong \mathbf{Z}$ であり、

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}^\sharp \arrow[r, "m^\sharp"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbf{Z} \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbf{Z} \arrow[r, "m"'] & \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

の可換図が成立する。しかし、$m \neq 1, -1$ に対して m は全射ではないため $m^\sharp$も全射ではない。

□

では、短完全列の双対が短完全列になる条件とはなんなのだろう。まぁ、単純に考えれば次のようなことである。

Proposition 0.0.17

短完全列、$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ が分解するとき、

$$0 \longrightarrow C^\sharp \xrightarrow{g^\sharp} A^\sharp \xrightarrow{f^\sharp} B^\sharp \longrightarrow 0 \quad \text{は分解する短完全列である。}$$

proof)　　$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ が分解するので、

$$^\exists h : A \longrightarrow B \qquad s.t \qquad h \circ f = 1_B$$

これより、$h^\sharp : B^\sharp \longrightarrow A^\sharp$ に対し、$f^\sharp \circ h^\sharp = 1_{B^\sharp}$

よって、$f^\sharp$は全射であり、$0 \longrightarrow C^\sharp \xrightarrow{g^\sharp} A^\sharp \xrightarrow{f^\sharp} B^\sharp \longrightarrow 0$　は分解する。

□

では、さらに踏み込んでどんなときに元々の短完全列は分解するのだろうか？

Proposition 0.0.18

C が自由加群であるとき、短完全列、$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ は分解する。

proof) C の基底を $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とすると、g が全射であるので、

$g(y_\lambda) = x_\lambda$ となる $y_\lambda \in A$ を選ぶ。

$h : C \longrightarrow A$ を、$h(x_\lambda) = y_\lambda$ で定義すると、$g \circ h = 1_C$ である。

□

さて、chain complex の短完全列からはホモロジー群の長い完全列が派生することが知られている。これをコホモロジー群に応用すれば次のようになる。

Definition 0.0.19

$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ が chain complex 完全列で、

C が自由 (各 n において、C_n が自由加群) であれば、

ホモロジー群の完全列と同様に、連結準同型

$$\delta^* : H^n(B) \longrightarrow H^{n+1}(C)$$

が定義され、次の完全列が導かれる。

$$\cdots \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{g^*} H^n(A) \xrightarrow{f^*} H^n(B) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(C) \longrightarrow \cdots$$

これを、コホモロジー群の長い完全列と呼ぶ。

さて、ホモロジー群とコホモロジー群を見てきたわけだが、両者よく似てるのはなんとなくわかると思う。実は、コホモロジー群とホモロジー群の間には自然に準同型が定まる。

Lemma 0.0.20

$$k_n : H^n(C) \longrightarrow H_n(C)^\sharp$$

を次で定義する。$[u] \in H^n(C)$ に対し、$u \in (S_n(C))^\sharp$ なので、

$$u : S_n(C) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

であるので、$k_n[u] : H_n(C) \longrightarrow \mathbf{Z}$ を、$k_n[u][x] = u(x)$ で定義するとこれは準同型である。

proof) well defined を調べれば十分である。まず、

$$k_n[u] : H_n(C) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

は、$[x] = [y] \in H_n(C)$ に対し、$x - y \in \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ なので、

$$^{\exists}z \in C_{n+1} \qquad s.t \qquad \partial_{n+1}(z) = x - y$$

ここで、$u \in \mathrm{Ker}\partial^{\sharp}_{-n} = \mathrm{Ker}(\partial_{n+1})^{\sharp}$ であるので、

$$u \circ \partial_{n+1} = (\partial_{n+1})^{\sharp}(u) = 0$$

これより、$k_n[u][x] - k_n[u][y] = u(x) - u(y) = u(x - y) = u \circ \partial_{n+1}(z) = 0$

$$\therefore \qquad k_n[u][x] = k_n[u][y]$$

これにより、とりあえず $k_n[u]$ が準同型であることは示された。次に、

$$[u] = [v] \in H^n(C) \text{ に対し、} u - v \in \mathrm{Im}(\partial_n)^{\sharp} \text{であるため、}$$

$^{\exists}w \in (C_{n+1})^{\sharp} \qquad s.t \qquad (\partial_n)^{\sharp}(w) = u - v$

$$\text{つまり、} w \circ \partial_n = u - v$$

ここで、$x \in \mathrm{Ker}\partial_n$ であることから、

$$k_n[u][x] - k_n[v][x] = u(x) - v(x) = (u - v)(x) = w \circ \partial_n(x) = 0$$

よって、$k_n[u] = k_n[v]$。これより、k_n は準同型になる。

□

この準同型が同型になるには、ある程度条件が必要である。これが「普遍係数定理」と呼ばれるものである。

Theorem 0.0.21 （普遍係数定理）

C : 自由 chain complex、$H_{n-1}(C)$ が自由加群であれば、

$$k_n : H^n(C) \longrightarrow H_n(C)^\sharp \quad \text{は同型である。}$$

proof)　　まず、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\partial \xrightarrow{j} C \xrightarrow{\partial} \mathrm{Im}\partial \longrightarrow 0$$

は短完全列である（j は inclusion)。注意すべきは、

$$(C_n, \partial_n)_{n\in\mathbf{Z}} \ , \ (\mathrm{Ker}\partial_n, \partial_n)_{n\in\mathbf{Z}} \ , \ (\mathrm{Im}\partial_n, \partial_{n-1})_{n\in\mathbf{Z}}$$

が chain complex であることを確認しておく。ここで、C が自由なので、その部分複体も自由である。よって、上の完全列は分解し

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Im}\partial)^\sharp \xrightarrow{j^\sharp} C^\sharp \xrightarrow{\partial^\sharp} (\mathrm{Ker}\partial)^\sharp \longrightarrow 0$$

が完全となり、次の完全列が生まれる。

$$\cdots \longrightarrow H^n(\mathrm{Im}\partial) \xrightarrow{\partial^*} H^n(C) \xrightarrow{j^*} H^n(\mathrm{Ker}\partial) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(\mathrm{Im}\partial) \longrightarrow \cdots$$

ここで、

$$\partial_n : \mathrm{Ker}\partial_n \longrightarrow \partial_{n-1} \quad , \quad \partial_n : \mathrm{Im}\partial_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Im}\partial_n$$

は当然ながら 0 準同型である。よってその双対も 0 準同型であり､0 準同型をバウンダリーとした chain complex から作られるホモロジー群は商群でもなく、そのままになる。つまり、

$$H^n(\mathrm{Ker}\partial) = (\mathrm{Ker}\partial_n)^\sharp \quad , \quad H^{n+1}(\mathrm{Im}\partial) = (\mathrm{Im}\partial_{n+1})^\sharp$$

である。ここで、連結準同型

$$\delta^* : H^n(\mathrm{Ker}\partial) \longrightarrow H^{n+1}(\mathrm{Im}\partial)$$

は、$[\alpha] \in H^n(\mathrm{Ker}\partial)$ なので､$\delta^*[\alpha] = (\partial_{n+1})^\sharp \circ \alpha$

よって、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathrm{Im}\partial_n)^\sharp \arrow[r, "\partial_n^\sharp"] \arrow[d, "\partial_n^\sharp"'] & C_n^\sharp \arrow[r, "j_n^\sharp"] \arrow[d, "\partial_{n+1}^\sharp"'] & (\mathrm{Ker}\partial_n)^\sharp \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}^\sharp"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{Im}\partial_{n+1})^\sharp \arrow[r, "\partial_{n+1}^\sharp"] & C_{n+1}^\sharp \arrow[r, "j_{n+1}^\sharp"] & (\mathrm{Ker}\partial_{n+1})^\sharp \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の図式から連結準同型をどう定義したかを思い起こせば、

$$\begin{aligned}\delta^*[\alpha] &= [(\partial^\sharp_{n+1})^{-1}(\partial^\sharp_{n+1}(j^\sharp_n)^{-1}(\alpha))] \qquad \partial^\sharp_{n+1}\text{が単射で定義域を考慮すれば、}\\ &= [(j_n \circ i_n)^\sharp (j^\sharp_n)^{-1}(\alpha)]\\ &= [i^\sharp_n \circ j^\sharp_n (j^\sharp_n)^{-1}(\alpha)] \qquad j_n\text{が全射なので、}\\ &= [i^\sharp_n(\alpha)]\end{aligned}$$

であった。そこで先ほど商群が無意味であったことを思い出せば、

$$\delta^*(\alpha) = i^\sharp_n(\alpha)$$

ということになり、$\delta^* = i^\sharp_n$ である。よって先ほどの長いコホモロジー群の完全列は、

$$\cdots \longrightarrow H^n(\mathrm{Ker}\partial) \xrightarrow{i^\sharp_{n-1}} H^n(\mathrm{Im}\partial) \xrightarrow{\partial^*} H^n(C) \xrightarrow{j^*_n} H^n(\mathrm{Ker}\partial) \xrightarrow{i^\sharp_n} H^{n+1}(\mathrm{Im}\partial) \longrightarrow \cdots$$

となる。また、次の完全列を考える。

$$\mathrm{Im}\partial_{n+1} \xrightarrow{i_n} \mathrm{Ker}\partial_n \xrightarrow{p_n} H_n(C) \longrightarrow 0$$

は完全列であり、(ただし、p_n は projection）この双対、

$$0 \longrightarrow H_n(C)^\sharp \xrightarrow{p^\sharp_n} (\mathrm{Ker}\partial_n)^\sharp \xrightarrow{i^\sharp_n} (\mathrm{Im}\partial_{n+1})^\sharp$$

が完全になり、$p^\sharp$ が単射であることと準同型定理より、

$$p^\sharp : H_n(C)^\sharp \cong \mathrm{Ker} i^\sharp_n \qquad \cdots\cdots\cdots$$

さらに同じ議論で、$n-1$ の時を考えると、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\partial_n \xrightarrow{i_{n-1}} \mathrm{Ker}\partial_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

が $H_{n-1}(C)$ は自由なので、今度はこれが分解する完全列になるため、

$$0 \longrightarrow H_{n-1}(C)^\sharp \xrightarrow{p^\sharp_{n-1}} (\mathrm{Ker}\partial_{n-1})^\sharp \xrightarrow{i^\sharp_{n-1}} (\mathrm{Im}\partial_n)^\sharp \longrightarrow 0$$

が完全になり、$i^\sharp_{n-1}$ が全射となる。とすれば、長い完全列において、

$$\mathrm{Ker}\partial^* = \mathrm{Im} i^\sharp_{n-1} = H^n(\mathrm{Im}\partial)$$

であるため、

$$0 = \mathrm{Im}\partial^* = \mathrm{Ker} j^*_n$$

ということになれば、j_n^* は単射になる。

$$j_n^* : H^n(C) \cong \mathrm{Im} j_n^\sharp = \mathrm{Ker} i_n^\sharp \qquad \cdots\cdots\cdots$$

さらに、

$$(p^\sharp \circ k_n[\alpha])(\beta) = k_n[\alpha] \circ p(\beta) = k_n[\alpha][\beta] = \alpha(\beta) = j_n^*[\alpha](\beta)$$

が成立するので、$p^\sharp \circ k_n = j_n^*$ であり、　、　より、k_n は同型。

$\square$