では、次に位相空間のコホモロジー群を構成しよう。位相空間のホモロジー群と、双対の考えさえあればもうできているようなものだが。

Definition 0.0.1

位相空間 X に対し、特異chain complex、$(S_*(X), \partial_*)$ に対し、

$$H^n(S_*(X)) = H^n(X)$$

と書き、X の n 次コホモロジー群と呼ぶ。

また連続写像、$f : X \longrightarrow Y$ 　に対し、準同型

$$f^\sharp : S^\sharp(Y) \longrightarrow S^\sharp(X)$$

が誘導され、さらにそこから、

$$f^* : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$$

が誘導される。これを f から誘導されたコホモロジー群間の準同型と呼ぶ。

Remmark 0.0.2

$H^* : \mathrm{TOP} \longrightarrow \mathrm{Abel}$ 　は反変関手である。

Remmark 0.0.3

任意の位相空間 X に対し、$n < 0$ においては、$H^n(X) = 0$

Proposition 0.0.4

$f \simeq g : X \longrightarrow Y \quad \Longrightarrow \quad f^* = g^* : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$

proof)　ホモロジー群を思い出せば、$f \simeq g$ ならば、

$f_\sharp \simeq g_\sharp$であり、この双対もまた、$f^\sharp \simeq g^\sharp$であり、$f^* = g^*$

$\square$

これにより、$H^*(X)$ は位相不変量、もっと言えばホモトピー不変量であることがいえる。位相空間のコホモロジー群の場合、$S(X)$ は自由であるから、普遍係数定理は次のようになる。

Theorem 0.0.5 （普遍係数定理）

位相空間 X に対し、$H_{n-1}(X)$ が自由加群であれば、

$$k_n : H^n(X) \longrightarrow H_n(X)^\sharp$$

は同型である。

Theorem 0.0.6 （次元定理）

X が一点空間の時、 $H^n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

proof) 一点空間のホモロジー群を思い出せば、

$H_n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ であった。これはすべての次数で自由であるので、

普遍係数定理より、$H^n(X) \cong H_n(X)^\sharp$ で、

$$0^\sharp = 0\ ,\ \mathbf{Z}^\sharp \cong \mathbf{Z}$$

であるため、 $H^n(X) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

□

Lemma 0.0.7

$\{A_{\lambda\in\Lambda}\}$: 加群の族に対し、 $(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^\sharp \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\sharp$

proof) $\varphi : (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^\sharp \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\sharp$ を次で定義する。$x \in (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^\sharp$ に対し、

$$x : \oplus A_\lambda \longrightarrow \mathbf{Z}$$

であり、$\varphi(x) : \Lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\sharp$ を定義する。つまり、$\varphi(x)(\lambda) : A_\lambda \longrightarrow \mathbf{Z}$ を、

$$\varphi(x)(\lambda)(a) = x(a)$$

で定義する。また、$\psi : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\sharp \longrightarrow (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^\sharp$ を次で定義する。

$$\alpha \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\sharp \text{とすると、} \alpha : \Lambda \longrightarrow \coprod A_\lambda$$

であり、$\alpha(\lambda) : A_\lambda \longrightarrow Z$ であるので、これより、

$$\psi(\alpha) : \oplus A_\lambda \longrightarrow \mathbf{Z}$$

を、$a_\lambda \in A_\lambda$ に対し、$\psi(\alpha)(a_\lambda) = \alpha(\lambda)(a_\lambda)$ で定義する。

$$\varphi \circ \psi(\alpha)(a_\lambda) = \varphi \circ \alpha(\lambda)(a_\lambda) = \alpha(a_\lambda)$$

また、

$$\psi \circ \varphi(x)(\lambda)(a) = \psi(x(a)) = x(\lambda)(a)$$

これより、$\varphi \circ \psi = 1$, $\psi \circ \varphi = 1$

$\square$

Proposition 0.0.8

位相空間の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し、$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく。

$$i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$$

を inclusion とすると、$i_\lambda^* : H^*(X) \longrightarrow H^*(X_\lambda)$ に対し、

$$\prod i_\lambda^* : H^*(X) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} H^*(X_\lambda)$$

は同型であう。

proof)　ホモロジーの加法性定理を思い起こすと、

$$\oplus i_{\lambda\sharp} : \oplus S(X_\lambda) \longrightarrow S(X)$$

は同型な chain map であり、この双対を考えると、

$$(\oplus i_{\lambda\sharp})^\sharp : S^\sharp(X) \longrightarrow (\oplus S(X_\lambda))^\sharp$$

が同型となる。Lemma 0.0.7 により、$(\oplus S(X_\lambda))^\sharp \cong \prod S^\sharp(X_\lambda)$ であり、この同型を考慮すれば、

$$\prod i_\lambda^\sharp : S^\sharp(X) \longrightarrow \prod S^\sharp(X_\lambda)$$

が同型となる。これより、

$$(\prod i_\lambda^\sharp)^* : H^*(X) \longrightarrow H^*(\prod S^\sharp(X_\lambda))$$

が同型となる。面倒なので詳細は省くが、ホモロジーの加法性定理の証明を読み返せば、

$$H^*(\prod S^\sharp(X_\lambda)) \cong \prod H^*(X_\lambda)$$

が成り立つため、この同型を繋げれば、

$$\prod i_\lambda^* : H^*(X) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} H^*(X_\lambda)$$

が同型となる。

□