Definition 0.0.1

C, D : chain complex で $C^\sharp \otimes D^\sharp$ に対し、

$$\delta : C^\sharp \otimes D^\sharp \longrightarrow C^\sharp \otimes D^\sharp$$

を、$u \in C_p^\sharp$, $v \in D_q^\sharp$ に対し、

$$\delta(u \otimes v) = \delta(u) \otimes v + (-1)^p u \otimes \delta(v)$$

でバウンダリーを定義すれば、$C^\sharp \otimes D^\sharp$ は chain complex

Definition 0.0.2

C, D : chain complex に対し、

$$\mu : C^\sharp \otimes D^\sharp \longrightarrow (C \otimes D)^\sharp$$

を、$< \mu(u \otimes v), c \times d >=< u, c >< v, d >$ で定義する。

$$(u \in C^\sharp \ , \ v \in D^\sharp \ , \ c \in C \ , \ d \in D)$$

Lemma 0.0.3

μ : chain map

proof) $u \in C_p^\sharp$, $v \in D_q^\sharp$, $c \in C_r$, $d \in D_s$ に対し、

$$\begin{aligned}
& < \delta \circ \mu(u \otimes v), c \otimes d > \\
&= < \mu(u \otimes v), \partial(c \otimes d) > \\
&= < \mu(u \otimes v), \partial(c) \otimes d + (-1)^r c \otimes \partial(d) > \\
&= < \mu(u \otimes v), \partial(c) \otimes d > + (-1)^r < \mu(u \otimes v), c \otimes \partial(d) > \\
&= < u, \partial(c) >< v, d > + (-1)^r < u, c >< v, \partial(d) > \\
&= < \delta(u), c >< v, d > + (-1)^r < u, c >< \delta(v), d >
\end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned}
& < \mu \circ \delta(u \otimes v), c \otimes d > \\
&= < \mu(\delta(u) \otimes v + (-1)^p u \otimes \delta(vu, c)), c \otimes d > \\
&= < \mu(\delta(u) \otimes v), c \otimes d > + (-1)^p < \mu(u \otimes \delta(v), c \otimes d) > \\
&= < \delta(u), c >< v, d > + (-1)^p < u, c >< \delta(v), d >
\end{aligned}$$

$p \neq r$ ならば、$< u, c >= 0$ なので、$\delta \circ \mu = \mu \circ \delta$

$\square$

Lemma 0.0.4

μ は chain map に関して natural

proof)　　　つまり、chain map

$$f : C \longrightarrow C' \ , g : D \longrightarrow D'$$

に対し、次の図式、

$$\begin{tikzcd}
C'^{\sharp} \otimes D'^{\sharp} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f^{\sharp}\otimes g^{\sharp}"'] & (C' \otimes D')^{\sharp} \arrow[d, "(f\otimes g)^{\sharp}"] \\
C^{\sharp} \otimes D^{\sharp} \arrow[r, "\mu"'] & (C \otimes D)^{\sharp}
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい。$u \in C'^{\sharp}$, $v \in D'^{\sharp}$, $c \in C$, $d \in D)$ に対し、

$$\begin{aligned}
< (f \otimes g)^{\sharp} \circ \mu(u \otimes v), c \otimes d > &=< \mu(u \otimes v), (f \otimes g)(c \otimes d) > \\
&=< \mu(u \otimes v), f(c) \otimes g(d) > \\
&=< u, f(c) >< v, g(d) >
\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}
< \mu \circ f^{\sharp} \otimes g^{sharp}(u \otimes v), c \otimes d > &=< \mu(f^{\sharp}(u) \otimes g^{\sharp}(v)), c \otimes d > \\
&=< f^{\sharp}(u), c >< g^{\sharp}(v), d > \\
&=< u, f(c) >< v, g(d) >
\end{aligned}$$

よって、$(f \otimes g)^{\sharp} \circ \mu = \mu \circ f^{\sharp} \otimes g^{sharp}$

$\square$

Definition 0.0.5

Alexander-Whitney map の双対

$$\rho^{\sharp} : (S(X) \otimes S(Y))^{\sharp} \longrightarrow S^{\sharp}(X \times Y)$$

と、

$$\mu : S^{\sharp}(X) \otimes S^{\sharp}(Y) \longrightarrow (S(X) \otimes S(Y))^{\sharp}$$

の合成、

$$\rho^\sharp \circ \mu : S^\sharp(X) \otimes S^\sharp(Y) \longrightarrow S^\sharp(X \times Y)$$

を考え、$x \otimes y \in S^\sharp(X) \otimes S^\sharp(Y)$ に対し、その像

$$\rho^\sharp \circ \mu(x \otimes y) = x \times y$$

と書き、x と y のクロス積と呼ぶ。

Proposition 0.0.6

X, Y, Z, W 位相空間と、連続写像、

$$f : X \longrightarrow Z \quad , \quad g : Y \longrightarrow W$$

に対し、$u \in S^\sharp(Z)$, $v \in S^\sharp(W)$ とすると、

$$(f \times g)^\sharp(u \times v) = f^\sharp(u) \times f^\sharp(v)$$

proof)　　ρ と μ が natural であるので成り立つ。

□

次の命題はクロス積とカップ積の関係を表すものである。

Proposition 0.0.7

対角写像 $d : X \longrightarrow X \times X$ に対し、

$$d^\sharp : S^\sharp(X \times X) \longrightarrow S^\sharp(X)$$

を考える。$u, v \in S^\sharp(X)$ に対し、

$$d^\sharp(u \times v) = u \cup v$$

proof)　$u \in S_p^\sharp(X)$, $v \in S_q^\sharp(Y)$, $\sigma : \Delta^{p+q} \longrightarrow X$ に対し、

$$
\begin{aligned}
&< d^\sharp(u \times v), \sigma > \\
&= < \rho^\sharp \circ \mu(u \otimes v), d \circ \sigma > \\
&= < \mu(u \otimes v), \rho(d \circ \sigma) > \\
&= < \mu(u \otimes v), \sum p_1 \circ d \circ \sigma \circ F_i \otimes p_2 \circ d \circ \sigma \circ L_{p+q-i} > \\
&= \sum < \mu(u \otimes v), \sigma \circ F_i \otimes \sigma \circ L_{p+q-i} > \\
&= \sum < u, \sigma \circ F_i >< v, \sigma \circ L_{p+q-i} > \quad i \neq p \text{ では } 0 \text{ であるので、} \\
&= < u, \sigma \circ F_p >< v, \sigma \circ L_q > \\
&= < u \cup v, \sigma >
\end{aligned}
$$

よって、$d^\sharp(u \times v) = u \cup v$

□

Proposition 0.0.8

X, Y 位相空間で、

$$p_1 : X \times Y \longrightarrow X \quad , \quad p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$$

を projection とし、

$$p_1^\sharp : S^\sharp(X) \longrightarrow S^\sharp(X \times Y) \quad , \quad p_2^\sharp : S^\sharp(Y) \longrightarrow S^\sharp(X \times Y)$$

を考えると、$u \in S^\sharp(X)$, $v \in S^\sharp(Y)$ に対し、

$$u \times v = p_1^\sharp(u) \cup p_2^\sharp(v)$$

proof)　対角写像 $d : X \times Y \longrightarrow (X \times Y) \times (X \times Y)$ を考えれば、

$$
\begin{aligned}
p_1^\sharp(u) \cup p_2^\sharp(v) &= d^\sharp(p_1^\sharp(u) \times p_2^\sharp(v)) \\
&= d^\sharp \circ (p_1 \times p_2)^\sharp(u \times v) \\
&= (p_1 \times p_2 \circ d)^\sharp(u \times v) = u \times v
\end{aligned}
$$

Lemma 0.0.9

$x \otimes y \in S_p^\sharp(X) \otimes S_q^\sharp(Y)$ に対し、

$$\delta(x \times y) = \delta(x) \times y + (-1)^p x \times \delta(y)$$

proof) $x \otimes y \in S_p^\sharp(X) \otimes S_q^\sharp(Y)$, $\sigma \in S_n(X \times Y)$ とすると、

$$\begin{aligned}
&< \delta(x \times \mathrm{y}), \sigma > \\
&= < \rho^\sharp \circ \mu(x \otimes y), \partial(\sigma) > \\
&= < \mu(x \otimes y), \rho \circ \partial(\sigma) > \\
&= < \mu(x \otimes y), \partial \circ \rho(\sigma) > \\
&= < \mu(x \otimes y), \partial(\sum_{i=0}^{n} p_1 \circ \sigma \circ F_i \otimes p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i}) > \\
&= \sum_{i=0}^{n} (< \mu(x \otimes y), \partial(p_1 \circ \sigma \circ F_i) \otimes p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} > \\
&\quad + (-1)^i < \mu(x \otimes y), p_1 \circ \sigma \circ F_i \otimes \partial(p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i}) >) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (< x, \partial(p_1 \circ \sigma \circ F_i) >< y, p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} > \\
&\quad + (-1)^i < x, p_1 \circ \sigma \circ F_i >< y, \partial(p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i}) >) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (< \delta(x), p_1 \circ \sigma \circ F_i >< y, p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} > \\
&\quad + (-1)^i < x, p_1 \circ \sigma \circ F_i >< \delta(y), p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} >)
\end{aligned}$$

ここで、$i \neq p$ のとき、$< x, p_1 \circ \sigma \circ F_i >= 0$ なので、

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} (< \mu(\delta(x) \otimes y), p_1 \circ \sigma \circ F_i \otimes p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} > \\
&\quad + (-1)^p < \mu(x \otimes \delta(y)), p_1 \circ \sigma \circ F_i \otimes p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} >) \\
&= < \mu(\delta(x) \otimes y), \rho(\sigma) > +(-1)^p < \mu(x \otimes \delta(y)), \rho(\sigma) > \\
&= < p^\sharp \circ \mu(\delta(x) \otimes y), \sigma > +(-1)^p < p^\sharp \circ \mu(x \otimes \delta(y)), \sigma > \\
&= < \delta(x) \times y, \sigma > +(-1)^p < x \times \delta(y), \sigma >
\end{aligned}$$

よって、$\delta(x \times y) = \delta(x) \times y + (-1)^p x \times \delta(y)$

□

Definition 0.0.10

$[u] \in H^*(X)$, $[v] \in H^*(Y)$ に対し、Lemma 0.0.9 により、

$$[u] \times [v] = [u \times v]$$

と定義できる。これを u と v のクロス積と呼ぶ。また、*künneth* の定理の時の

$$\kappa : H^*(X) \otimes H^*(Y) \longrightarrow H^*(S^\sharp(X) \otimes S^\sharp(Y))$$

を思い出すと、$\kappa([u] \otimes [v]) = [u \otimes v]$ であった。それと、

$$\rho^\sharp \circ \mu : S^\sharp(X) \otimes S^\sharp(Y) \longrightarrow S^\sharp(X \times Y)$$

に対し、

$$\rho^* \circ \mu^* : H^*(S^\sharp(X) \otimes S^\sharp(Y)) \longrightarrow H^*(X \times Y)$$

の合成、

$$\rho^* \circ \mu^* \circ \kappa : H^*(X) \otimes H^*(Y) \longrightarrow H^*(X \times Y)$$

を考えると、$\rho^* \circ \mu^* \circ \kappa(\alpha \otimes \beta) = \alpha \times \beta$ である。

コホモロジーのクロス積の性質を調べていくのだが、次の二つの命題は Alexander-Whitney map の節の最後の二つの命題から成立する。そして、それ以下の性質は cochain complex で示したことの延長なので証明は省略する。

Proposition 0.0.11

$\alpha \in H^*(X)$, $\beta \in H^*(Y)$, $\gamma \in H^*(Z)$ に対し、

$$\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \times \beta) \times \gamma$$

Proposition 0.0.12

$\alpha \in H_p^*(X)$, $\beta \in H_q^*(Y)$、座標変換 $t : Y \times X \longrightarrow X \times Y$ に対し、

$$t^*(\alpha \times \beta) = (-1)^{pq} \beta \times \alpha$$

Proposition 0.0.13

X, Y, Z, W 位相空間と、連続写像、

$$f : X \longrightarrow Z \quad , \quad g : Y \longrightarrow W$$

に対し、$\alpha \in H^*(Z)$, $\beta \in H^*(W)$ とすると、

$$(f \times g)^*(\alpha \times \beta) = f^*(\alpha) \times f^*(\beta)$$

Proposition 0.0.14

対角写像 $d : X \longrightarrow X \times X$ に対し、

$$d^* : H^*(X \times X) \longrightarrow H^*(X)$$

を考える。$\alpha, \beta \in H^*(X)$ に対し、

$$d^*(\alpha \times \beta) = \alpha \cup \beta$$

Proposition 0.0.15

X, Y 位相空間で、

$$p_1 : X \times Y \longrightarrow X \quad , \quad p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$$

を projection とし、

$$p_1^* : H^*(X) \longrightarrow H^*(X \times Y) \quad , \quad p_2^* : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X \times Y)$$

を考えると、$\alpha \in H^*(X)$, $\beta \in H^*(Y)$ に対し、

$$\alpha \times \beta = p_1^*(\alpha) \cup p_2^*(\beta)$$

Definition 0.0.16

C : chain complex に対し、

$$<,>: H^*(C) \times H_*(C) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

を、$< [u], [c] >=< u, c >$ で定義する。

Lemma 0.0.17

$<,>: H^*(C) \times H_*(C) \longrightarrow \mathbf{Z}$ は well definded

proof) $u \in \mathrm{Im}\delta$ とすると、

$$^{\exists}u' \in C^{\sharp} \qquad s, t \qquad \delta(u') = u$$

$< u, c >=< \delta(u'), c >=< u', \partial(c) >=< u', 0 >= 0$

また、$c \in \mathrm{Im}\partial$ とすると、

$$^{\exists}c' \in C \qquad s,t \qquad \partial(c') = c$$

$< u, c > = < u, \partial(c') > = < \delta(u), c' > = < 0, c' > = 0$

これより、代表元の取り方によらないので $<,>$ は well definded。

$\square$

Proposition 0.0.18

位相空間 X, Y で、

$$\alpha \in H^*(X)\ ,\ \beta \in H^*(Y)\ ,\ x \in H_*(X)\ ,\ y \in H_*(Y)$$

に対し、

$$< \alpha \times \beta, x \times y > = < \alpha, x >< \beta, y >$$

proof) $\quad \alpha = [\alpha']\ ,\ \beta = [\beta']\ , x = [x']\ ,\ y = [y']$ とする。

$$\begin{aligned}
&< \alpha \times \beta, x \times y > \\
&= < p^* \circ \mu^* \circ \kappa(\alpha \otimes \beta), \tau_* \circ \kappa(x \otimes y) > \\
&= < \mu^* \circ \kappa(\alpha \otimes \beta), p_* \circ \tau_* \circ \kappa(x \otimes y) > \\
&= < \mu^*[\alpha' \otimes \beta'], [x' \otimes y'] > \\
&= < \mu(\alpha' \otimes \beta'), x' \otimes y' > \\
&= < \alpha', x' >< \beta', y' > = < \alpha, x >< \beta, y >
\end{aligned}$$

$\square$

Theorem 0.0.19

$a_1 \in H^p(X)\ ,\ b_1 \in H^q(Y)\ ,\ a_2 \in H^r(X)\ ,\ b_2 \in H^s(Y)$ に対し、

$$(a_1 \cup a_2) \times (b_1 \cup b_2) = (-1)^{qr}(a_1 \times b_1) \cup (a_2 \times b_2)$$

proof)

$$\begin{aligned}
(a_1 \cup a_2) \times (b_1 \cup b_2) &= p_1^*(a_1 \cup a_2) \cup p_2^*(b_1 \cup b_2) \\
&= p_1^*(a_1) \cup p_1^*(a_2) \cup p_2^*(b_1) \cup p_2^*(b_2) \\
&= (-1)^{qr}(p_1^*(a_1) \cup p_2^*(b_1)) \cup (p_1^*(a_2) \cup p_2^*(b_2)) \\
&= (-1)^{qr}(a_1 \times b_1) \cup (a_2 \times b_2)
\end{aligned}$$

□

Definition 0.0.20

C, D : 次数付き環とし、$c \otimes d \in C_p \otimes D_q$, $c' \otimes d' \in C_r \otimes D_q$ に対し、

$$(c \otimes d)(c' \otimes d') = (-1)^{qr} cc' \otimes dd'$$

と定義する。$C \times D$ は自由であるので、これは積を成し、$C \otimes D$ は次数付きの環である。

Proposition 0.0.21

クロス積のよる準同型

$$\times : H^*(X) \otimes H^*(Y) \longrightarrow H^*(X \times Y)$$

は次数付き環の準同型である。

proof) $a_1 \in H^p(X)$, $b_1 \in H^q(Y)$, $a_2 \in H^r(X)$, $b_2 \in H^s(Y)$ に対し、

$$\begin{aligned}\times((a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2)) &= (-1)^{qr} \times ((a_1 \cup a_2) \otimes (b_1 \cup b_2)) \\ &= (-1)^{qr}(-1)^{qr}(a_1 \times b_1) \cup (a_2 \times b_2) \\ &= \times(a_1 \otimes b_1) \cup \times(a_2 \otimes b_2)\end{aligned}$$

□