CW 複体

位相空間すべてを扱うのは困難である。そこで、調べやすい、性質のよい空間に限定して考えるのが 1 つのアイデアである。多様体なんかがその最たるものであるが、ホモトピー論的には CW 複体がよく扱われる。

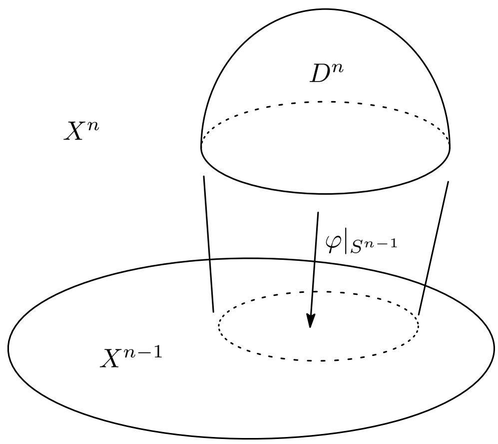
1　胞複体

まず CW 複体の前に胞複体の話から。胞複体とは簡単にいうと、ディスクがその境界で張り合わされたような空間である。

定義 1.1. Hausdorff 空間 X の胞体分割とは、連続写像の族 $\{\varphi_\lambda : D^{n_\lambda} \longrightarrow X\}_{\lambda\in\Lambda}$ で以下を満たす。

1. $\varphi_{\lambda|\mathrm{Int}D^{n_\lambda}} : \mathrm{Int}D^{n_\lambda} \longrightarrow \varphi_\lambda(\mathrm{Int}(D^{n_\lambda}))$ は同相である。
2. $e_\lambda = \varphi_\lambda(IntD^{n_\lambda})$ とおき、$\dim(e_\lambda) = n_\lambda$ とかく。$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ であり、$\lambda \neq \mu$ に対し、$e_\lambda \cap e_\mu = \phi$ である。
3. $m \in \mathbb{Z}$ に対し、$X^{(r)} = \bigcup_{\dim(e_\lambda)\leqq r} e_\lambda$ とおき、X の m-骨格と呼ぶ。ただし、$r < 0$ のとき、$X^{(r)} = \phi$ とする。$\dim(e_\lambda) = n$ のとき、$\varphi_\lambda(\partial D^n) = \varphi_\lambda(S^{n-1}) \subset X^{(n-1)}$ となる

胞体分割が指定された X を胞複体とよび、$X = \bigcup e_\lambda$ で表す。後は、呼び名だけ紹介する。各 e_λ を X の胞体と呼び、特に $\dim(e_\lambda) = n$ のとき、n-胞体と呼ぶ。φ_λ を e_λ の特性写像と呼ぶ。胞複体 X 自身の次元は、各胞体の次元のうち最大のものをさすこととする。これを $\dim(X)$ とかき最大値が存在するときは有限次元胞複体、最大値が無いときは、$\dim(X) = \infty$ と書いて無限次元胞複体とよぶ。胞体の個数が有限、つまり Λ が有限集合のとき、X は有限胞複体とよぶ。X が有限ならば、有限次元だが逆は一般に成立しない。つまり、胞複体は下のように $X^{(n-1)}$ に D^n を境界で貼り付けて構成する空間である。



補題 1.2. $X = \bigcup e_\lambda$ のとき、n-胞体 e_λ に対し、その特性写像 $\varphi_\lambda : D^n \longrightarrow X$ において、$\varphi_\lambda(D^n) = \overline{e_\lambda}$ である。

証明 $\overline{(\mathrm{Int}(D^n)} = D^n$ より、

$$\varphi_\lambda(D^n) = \varphi_\lambda\left(\overline{\mathrm{Int}(D^n)}\right) \subset \overline{\varphi_\lambda(\mathrm{Int}(D^n))} = \overline{e_\lambda}$$

である。逆に、D^n がコンパクトと、X が Hausdorff により、$\varphi(D^n)$ は閉集合なので、

$$\overline{e_\lambda} \subset \overline{\varphi_\lambda(D^n)} = \varphi_\lambda(D^n)$$

である。 □

定義 1.3. 胞複体 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ において、$A \subset X$ が X の部分複体であるとは、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し、$A \cap e_\lambda \neq \phi$ ならば、$\overline{e_\lambda} \subset A$ となるときをさす。

注意 1.4. X の部分複体 A において、$\Lambda_A = \{\lambda \in \Lambda \mid e_\lambda \cap A \neq \phi\}$ とおくと、$\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_A}$ は A の胞体分割を与える。

補題 1.5. 胞複体 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ において、m-骨格 $X^{(m)}$ は部分複体である。

証明 $e_\lambda \cap X^{(m)} \neq \phi$ とすると、$\lambda \neq \mu$ に対し、$e_\lambda \cap e_\mu = \phi$ であることから、$\dim(e_\lambda) \leqq m$、つまり、$e_\lambda \subset X^{(m)}$ であることがわかる。また、$\partial e_\lambda \subset X^{(m-1)}$ なので、結局、$\overline{e_\lambda} \subset X^{(m)}$ である。 □

補題 1.6. 胞複体 $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ において、X の任意個の部分複体の和集合、および共通部分はまた X の部分複体となる。

証明 $\{A_\mu\}_{\mu\in M}$ を X の部分複体の族とする。まず和集合に関して。$\lambda \in \Lambda$ に対し、$e_\lambda \cap \left(\bigcup_\mu A_\mu\right) \neq \phi$ とすると、$e_\lambda \cap A_\mu \neq \phi$ となる $\mu \in M$ が存在する。よって、A_μ が部分複体であるから、$\overline{e_\lambda} \subset A_\mu \subset \cup A_\mu$ となる。共通部分に関しても同様である。すべての A_μ と共通部分を持つことから、同じように示される。 □

注意 1.7. $X = \cup e_\lambda, Y = \cup e_\mu$ を 2 つの胞複体としたとき、

$$X \times Y = \cup(e_\lambda \times e_\mu)$$

は、$D^{n+m} \cong D^n \times D^m$ を考えると胞複体となる。

例 1.8. いくつか胞複体の例を述べる。

1. $S^n = e^0_+ \cup e^0_- \cup \cdots \cup e^n_+ \cup e^n_-$ は胞体分割である。ただし、特性写像 $\varphi_{k,+}, \varphi_{k,-} : D^k \longrightarrow S^k \subset S^n$ は k-次元の上半球面と下半球面に対応させる写像とする。
2. $S^n = e^0 \cup e^n$ は胞体分割である。ただし、特性写像は、$\varphi_n : D^n \longrightarrow D^n/\partial D^n \cong S^n$, $\varphi_0(D^0) = * \in S^n$ で与える。
3. (2) の例に $n+1$ 胞体を貼り付ければ、$D^{n+1} = e^0 \cup e^n \cup e^{n+1}$ は胞体分割である。
4. $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}(\{i\} \cup (i, i+1))$ は胞体が無限にある次元 1 の胞体分割である。
5. $\mathbb{R}^n$ や $T = S^1 \times S^1$ なども、$\mathbb{R}$ と S^1 の適当な胞体分割を用いた積胞複体である。

2 CW 複体

任意の空間 X に対し、$X = \cup_{x\in X}\{x\}$ とすれば、これは次元 0 の胞体分割である。しかし、これでは X の位相を十分反映できていない。せいぜい離散的な情報しかわからない。よって、もっと元の空間の位相情報を反映した胞体分割を考えたい。また、空間を調べる上で有効なのは、有限性の延長にあるような空間である。そのような都合のよい胞複体を CW 複体と呼んでいるのである。それらの条件が有限性の帰納的極限たる条件 (C) と、有限の被覆における位相の一致を保証する条件 (W) である。

定義 2.1. 胞複体 $X = \cup e_\lambda$ に対し、条件 (C) とは、$x \in X$ に対し、$x \in A$ となる有限の部分複体が存在することである。

これにより、局所的には有限の胞体が張り合わさっていると考えられる。この条件が「closure finite」と呼ばれているのは、これと同値な条件として次が挙げられるからであろう。

補題 2.2. 条件 (C) と、任意の胞体 e_λ に対し、$\overline{e_\lambda} \subset A$ となる有限部分複体が存在することは同値である。

Proof. 条件 (C) が成り立つとすると、任意の胞体 e_λ に対し、$x \in e_\lambda$ をとると、$x \in A$ となる有限部分複体が存在する。$x \in A \cap e_\lambda \neq \phi$ なので、部分複体の定義から、$\overline{e_\lambda} \subset A$ である。逆を示す。$x \in X$ に対し、$x \in e_\lambda$ となる胞体が存在するため、$x \in e_\lambda \subset \overline{e_\lambda} \subset A$ となる有限部分複体が存在する。 □

次は条件 (W) である。これは一般の位相空間の被覆に対する条件である。

定義 2.3. X を位相空間とし、$\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をその被覆とする。このとき、X が $\mathcal{A}$ による弱位相を持つとは、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し、$A_\lambda \cap O$ が A_λ における開集合ならば、O は X の開集合になることである。

つまり、被覆によって X の位相を決めるということで、上記の開集合を閉集合に置き換えても弱位相の定義は変わりない。

定義 2.4. 胞複体 $X = \cup e_\lambda$ に対し、条件 (W) とは、X が、被覆 $\{\overline{e_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ により弱位相をもつことである。

補題 2.5. 条件 (C) のもと、(W) は、X が被覆 $\{A \subset X \mid A$ は有限部分複体$\}$ による弱位相を持つことと同値である。

証明 (W) が成り立つとする。任意の有限部分複体 A に対し、$A = e_1 \cup \cdots e_n = \overline{e_1} \cup \cdots \cup \overline{e_n}$ であるから A は X の閉集合である。$F \cap A$ が A の閉集合であるとする。このとき、任意の胞体 e_λ に対し、補題 2.2 により、$\overline{e_\lambda} \subset A$ となる有限部分複体が存在することより、$F \cap \overline{e_\lambda} = (F \cap A) \cap \overline{e_\lambda}$ は $\overline{e_\lambda}$ における閉集合である。よって、(W) により F が X の閉集合である。

逆をしめす。任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し、$F \cap \overline{e_\lambda}$ が $\overline{e_\lambda}$ の閉集合とする。任意の有限部分複体 A に対し、

$$F \cap A = F \cap (\overline{e_1} \cup \cdots \cup \overline{e_n}) = (F \cap \overline{e_1}) \cup \cdots (F \cap \overline{e_n})$$

は A の閉集合となるため、F は閉集合である。 □

よって条件 (C) と (W) を満たせば、胞複体は各有限部分複体ごとに位相を考えればよいことになる。このようなものを CW 複体と呼ぶのである。

定義 2.6. 胞複体 X が CW 複体とは、条件 (C) と (W) を満たすものである。

命題 2.7. CW 複体 $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ に対し、その部分複体 A は閉集合である。

証明 補題 2.5 により、任意の有限部分複体 B に対し、$A \cap B$ が B の閉集合であることを示せばよい。$A \cap B$ は補題 1.6 により、有限部分複体で、有限なので閉集合である。 □

例 1.8 で挙げたすべての胞複体は、CW 複体である。それは、次の事実が大きい。

命題 2.8. 有限胞複体 X は CW 複体である。

証明 まず条件 (C) が成り立つのは X 自身が有限だから明らかである。また、条件 (W) についても、補題 2.5 により有限部分複体の被覆による弱位相が入っていることを確かめるわけだが、X 自身がこの被覆に含まれているので明らかである。 □

例 2.9. $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ は条件 (W) を満たさないため CW 複体ではない。

命題 2.10. X を CW 複体とする。X が有限であることと、X がコンパクトであることは同値である。

証明 $X = e_1 \cup \cdots \cup e_n$ とすると、$X = \overline{e_1} \cup \cdots \cup \overline{e_n}$ でもある。各 $\overline{e_i}$ はディスクのイメージであるためコンパクトである。その有限の和集合であるから X もコンパクトである。逆に X をコンパクトとすると、$X = \cup_\lambda e_\lambda$ による被覆から有限被覆がえらべるため X は有限である。 □

条件 (C) と似た条件で局所有限性というものがある。

定義 2.11. 胞複体 $X = \cup e_\lambda$ が局所有限であるとは、任意の $x \in X$ に対し、$x \in \mathrm{Int}(A)$ となる有限部分複体 A が存在することである。

命題 2.12. 局所有限な胞複体 X は CW 複体である。

証明 定義より、明らかに局所有限性は条件 (C) よりも強い。弱位相に関して考える。任意の有限部分複体 A に対し、$O \cap A$ が A の開集合であると仮定する。$x \in O$ に対し、局所有限性から $x \in \mathrm{Int}(B)$ となる有限部分複体が存在する。このとき、$x \in O \cap \mathrm{Int}(B)$ であるが、これが X の開集合であれば、O が X の開集合であることが示せる。今、$O \cap B$ は B の開集合だから、X の開集合 U が存在し、$O \cap B = U \cap B$ となる。

$$O \cap \mathrm{Int}(B) = O \cap B \cap \mathrm{Int}(B) = U \cap B \cap \mathrm{Int}(B) = U \cap \mathrm{Int}(B)$$

であり、これは X の開集合である。 □

例 2.13. 例 1.8 において、$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (\{i\} \cup (i, i+1))$ は局所有限である。よって CW 複体である。

命題 2.14. CW 複体 X の部分複体 A はまた CW 複体である。

証明 $x \in A$ に対し、$x \in B$ を満たす X の有限部分複体 B が存在する。このとき、$x \in A \cap B$ は A の有限部分複体であるため、条件 (C) はよい。また $F \subset A$ に対し、任意の A の胞体 e_λ において、$F \cap \overline{e_\lambda}$ が $\overline{e_\lambda}$ の閉集合とする。このとき、任意の X の胞体 e_μ に対し、部分複体の定義から $\overline{e_\mu} \subset A$ または、$\overline{e_\mu} \subset X - A$ である。よって、後者の場合 $F \cap \overline{e_\mu} = \phi$ であり、これも閉集合である。よって F は X の閉集合、これより A の閉集合でもある。 □

系 2.15. X を CW 複体としたとき、$n \geqq 0$ に対し、$X^{(n)}$ は閉集合で、それ自身 CW 複体である。

注意 2.16. (X, A) を CW 複体 $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ とその部分複体 $A = \cup_{\lambda \in \Lambda_A} e_\lambda$ の組とし、CW 対とよぶ。このとき、$p : X \longrightarrow X/A$ を射影とする。このとき、

$$X/A = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda - \Lambda_A} p(e_\lambda) \right) \cup p(A)$$

は CW 複体となる。商位相と弱位相が一致しているのを確かめるのはそれほど難しくはない。しかし残念ながら弱位相は積位相と相性が悪い。X と Y を CW 複体としたとき、$X \times Y$ は注意 1.7 で与えた胞体分割で CW 複体にはならない例がある。ある程度の有限性を仮定したり、位相をとり変えたりする操作が必要となる。

これまでのことから、CW 複体とは次元の低いほうから順にディスクの境界を貼り付けて得られるというのが直感的に理解できるが、それは理論的にも正しいということを確かめる。

定理 2.17. $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ を CW 複体とする。e_λ の特性写像を $\varphi_\lambda : D^{n_\lambda} \longrightarrow X$ とし、

$$\varphi_{S^{n-1}} = \coprod_{\dim(e_\lambda) = n} (\varphi_\lambda)_{|\partial D^n} : \coprod_{\dim(e_\lambda) = n} \partial D^n = \coprod_{\dim(e_\lambda) = n} S^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)} \subset X$$

とおいておく。このとき、$X^{(n)} \cong X^{(n-1)} \bigcup_{\varphi_{S^{n-1}}} \left(\coprod_{\dim(e_\lambda) = n} D^n_\lambda \right)$

証明 $f : X^{(n-1)} \bigcup_{\varphi_{S^{n-1}}} \left(\coprod_{\dim(e_\lambda) = n} D^n_\lambda \right) \longrightarrow X^{(n)}$ を以下のように定義する

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in X^{(n-1)} \\ \varphi_\lambda(x) & x \in D^n_\lambda \end{cases}$$

これが全単射連続であることを示すのはそれほど難しくない。f が閉写像であることを示す。つまり、$A \subset X^{(n-1)} \bigcup (\coprod D^n_\lambda)$ を閉集合としたとき、$f(A)$ が $X^{(n)}$ での閉集合であることを示せばよい。今、$X^{(n)}$ は CW 複体で弱位相が入っているから、$X^{(n)}$ の胞体、つまり次元 n 以下の胞体 e_λ について、$f(A) \cap \overline{e_\lambda}$ が閉集合であればよい。

1. $\dim(e_\lambda) < n$ の場合、$\overline{e_\lambda} \subset X^{(n-1)}$ であり、f は $X^{(n-1)}$ 上では包含写像なので、

$$f(A) \cap \overline{e_\lambda} = A \cap \overline{e_\lambda}$$

   は閉集合である。

2. $\dim(e_\lambda) = n$ の場合、

$$f(A) \cap \overline{e_\lambda} = \varphi_\lambda(D^n_\lambda \cap A)$$

   ここで、$D^n_\lambda \cap A$ は、コンパクト空間 D^n_λ の閉集合なので、それ自身もコンパクト。X は Hausdorff 空間だったので、$\varphi_\lambda(D^n_\lambda \cap A)$ は閉集合である。

□

これより、CW 複体に関する命題というのは、骨格の次元による帰納法でディスクの話に帰着させて行うことが可能となる。

系 2.18. X を CW 複体としたとき、$X^{(n)}/X^{(n-1)} \cong \bigvee_{\dim(e_\lambda)=n} S^n_\lambda$ である。