# CW 複体のホモロジー群

CW 複体のホモロジー群は、ディスクと球面のホモロジー群に帰着でき、計算が安易である。

## 1 CW 複体のホモロジー群

**定義 1.1.** $(X, A)$ を CW 対としたとき、$\overline{X^{(n)}} = X^{(n)} \cup A$ とおく。

$$CC_n(X, A) = \left\{ H_n\left( X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)} \right), \partial_n \right\}$$

により定義し、cellular chain complex とよぶ。で定義する。ただし、$\partial_n$ は、3 対 $\left( X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}, X_A^{(n-2)} \right)$ の長いホモロジー完全列における接続準同型

$$\partial_n : H_n\left( X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)} \right) \longrightarrow H_{n-1}\left( X_A^{(n-1)}, X_A^{(n-2)} \right)$$

である。これは、定義から $C(X)$ の微分を用いるため、$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ となるのが簡単にわかり、$CC(X, A)$ は chain complex である。また、このホモロジー群を $H_*(C(X, A))$ とかいて CW ホモロジー群と呼ぶことにする。

**命題 1.2.** $(X, A)$ を CW 対とし、$\Lambda_{A^c} = \{\lambda \in \Lambda \mid \dim(e_\lambda) = n, e_\lambda \subset A^c\}$ とおくと、

$$H_*\left( X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)} \right) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} H_*(D^n, S^{n-1})$$

**証明** $M = \{\varphi_\lambda(0) \mid \lambda \in \Lambda_{A^c}, 0 \in D^n\}$ とおき、次の可換図を考える。

$$\begin{tikzcd}
H_*\left( \coprod_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} D_\lambda^n, \coprod_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} S_\lambda^{n-1} \right) \arrow[r, "(\coprod \varphi_\lambda)_*"] \arrow[d] & H_*\left( X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)} \right) \arrow[d] \\
H_*\left( \coprod_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} D_\lambda^n, \coprod_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} (D_\lambda^n - \{0\}) \right) \arrow[r, "(\coprod \varphi_\lambda)_*"] & H_*\left( X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)} - M \right) \\
H_*\left( \coprod_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} \mathrm{Int}\left(D_\lambda^n\right), \coprod_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} (\mathrm{Int}(D_\lambda^n) - \{0\}) \right) \arrow[r, "(\coprod \varphi_\lambda)_*"] \arrow[u] & H_*\left( \coprod_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} e_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda_{A^c}} (e_\lambda - \varphi_\lambda(0)) \right) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ただし、縦列はすべて包含写像からの誘導である。このとき、上の縦列の 2 本の写像はともに変位レトラクション、つまりホモトピー同値写像からの誘導なので同型である。下の縦列の 2 本の写像は切除定理より同型である。一番下の横列の写像については、$\varphi$ がディスクの内部で同相ということから、誘導される写像は同型である。これより、真ん中、そして上横列の写像が同型となり、加法性定理を用いれば題意が導かれる。 □

**補題 1.3.** $(X, A)$ を CW 対としたとき、$k > n$ において、$H_k\left( X_A^{(n)}, A \right) = 0$ である。

**証明** $n$ による帰納法で示す。$n = 0$ のとき、$X_A^{(-1)} = A$ なので、命題 1.2 より、$k \neq 0$ においては、

$$H_k\left( X_A^{(0)}, A \right) = H_k\left( X_A^{(0)}, X_A^{(-1)} \right) \cong \oplus H_k(D^0, \phi) = 0$$

次に $k > n$ において、$H_k\left(X_A^{(n)}, A\right) = 0$ を仮定する。このとき、$\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n)}, A\right)$ の長いホモロジー完全列により、

$$H_{k+1}\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n)}\right) \longrightarrow H_k\left(X_A^{(n)}, A\right) \longrightarrow H_k\left(X_A^{(n+1)}, A\right) \longrightarrow H_k\left(X^{(n+1)}, X_A^{(n)}\right)$$

□

**補題 1.4.** CW 対 $(X, A)$ に対し、$k < n$ のとき、包含写像 $i : X_A^{(n)} \longrightarrow X$ からの誘導

$$i_* : H_k(X_A^{(n)}, A) \longrightarrow H_k(X, A)$$

は同型である。

**証明** 補題 1.3 と同様に $\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n)}, A\right)$ の長いホモロジー完全列から、$k < n$ に対して包含写像からの誘導、

$$H_k\left(X_A^{(n)}, A\right) \longrightarrow H_k\left(X_A^{(n+1)}, A\right)$$

これを繰り返すことにより、

$$H_k\left(X_A^{(n)}, A\right) \cong H_k\left(X_A^{(n+1)}, A\right) \cong H_k\left(X_A^{(n+2)}, A\right) \cong \cdots$$

という同型を構成できる。$X$ が有限次元ならばこの同型はいつか $H_k(X, A)$ を迎えるが、一般の無限次元 CW 複体に対しても余極限の概念を用いると同型であることがいえる。 □

**定理 1.5.** CW 対 $(X, A)$ に対し、CW ホモロジー群と特異ホモロジー群は同型である。つまり、$H_*(C(X, A)) \cong H_*(X, A)$ である。

**証明** 命題 1.2 より、$H_n\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n)}\right) = H_{n+1}\left(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}\right) = 0$ なので、次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
CC_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\partial_{n+1}"'] & H_n\left(X_A^{(n)}, X_A^{(n-2)}\right) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j_*"] & H_n\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n-2)}\right) \arrow[r] & 0 \\
 & CC_n(X,A) \arrow[d, "\partial_n"] & & \\
 & CC_{n-1}(X,A) & &
\end{tikzcd}$$

ここで横列は、$\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n)}, X_A^{(n-2)}\right)$、縦列は、$\left(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}, X_A^{(n-2)}\right)$ のホモロジー完全列である。よって、$j_*$ は単射であり、$i_*$ は全射である。これより、

$$H_n\left(X_A^{(n)}, X_A^{(n-2)}\right) \cong \mathrm{Im}(j_*) = \mathrm{Ker}(\partial_n)$$

さらに、

$$\begin{aligned}
H_n\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n-2)}\right) &\cong H_n\left(X_A^{(n)}, X_A^{(n-2)}\right)/\mathrm{Ker}(i_*) \\
&= H_n\left(X_A^{(n)}, X_A^{(n-2)}\right)/\mathrm{Im}(\partial_*) \\
&\cong \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \\
&= H_n(C(X, A))
\end{aligned} \tag{1}$$

ここで、$\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n-2)}, A\right)$ のホモロジー完全列

$$H_\mathrm{n}\left(X_A^{(n-2)}, A\right) \longrightarrow H_n\left(X_A^{(n+1)}, A\right) \longrightarrow H_n\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n-2)}\right) \longrightarrow H_{n-1}\left(X_A^{(n-2)}, A\right)$$

により、補題 1.3 から、$H_{\mathrm{n}}\left(X_A^{(n-2)}, A\right) = H_{n-1}\left(X_A^{(n-2)}, A\right) = 0$ である。よって、

$$H_n\left(X_A^{(n+1)}, A\right) \cong H_n\left(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n-2)}\right)$$

また、補題 1.4 より、$H_n(X_A^{n+1}, A) \cong H_n(X, A)$ だったので、(1) とあわせると、$H_n(C(X, A)) \cong H_n(X, A)$ となる。 □

これより、CW 複体のホモロジー群は特異ホモロジー群よりも骨格を用いた CW ホモロジーを用いた方が、基本的にはディスクと球面のホモロジー群に帰着できて楽である。

**注意 1.6.** $X$ を $n$-次元の CW 複体とすると、$m > n$ に対しては、$X^{(m)} = X$ であるから、$H_m(X^m, X^{(m-1)}) = H_m(X, X) = 0$ より、$H_m(X) = 0$ となる。

被約ホモロジー群も同様に CW 複体バージョンが考えられる。

**注意 1.7.** $(X, x_0)$ を基点付き CW 複体（$x_0$ が 0-胞体）に対し、$\widetilde{H}_*(C(X)) = H_*(C(X, x_0))$ により定義すると、$\widetilde{H}_*(C(X)) \cong \widetilde{H}_*(X)$ である。