Proposition 0.0.1

A を空間とし、$n \geqq 1$ で n 次元の胞体 e_λ^n を A に貼り付けた空間を X とする。つまり、

$$\varphi_\lambda : S_\lambda^{n-1} \longrightarrow A$$

に対し、$X = A \cup_{\varphi_\lambda} (\coprod_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda^n)$ とする。このとき、(X, A) は $n-1$ 連結である。

proof)　　$1 \leqq k \leqq n-1$ に対し、任意の連続写像 $f : (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X, A)$ に対し、

$$^\exists g : D^k \longrightarrow A \qquad s.t \qquad g \simeq f \quad \text{rel } S^{k-1}$$

を示せばよい。とりあえず、$f : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (X, A)$ と考えておく。$f(I^k)$: compact により、

$$^\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m \in \Lambda \quad s.t \quad f(I^k) \subset A \cup (\coprod_{i=1}^m D_{\lambda_i}^n)$$

であるため、各 $D_{\lambda_i}^n$ の原点 0 を除き、

$$U = A \cup (\coprod_{i=1}^m (D_{\lambda_i}^n - 0))$$

とおくと、これは X の開集合である。また、φ_{λ_i} による胞体 e_i も開集合であるから、$f(I^k)$ の有限開被覆として、

$$f(I^k) \subset U \cup e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_m$$

がとれる。ここで、I^k を十分小さく n 次元cube に分割し、各 cube の像が U または、e_i に含まれるようにできる。正確には、

$$I^k = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k \qquad (I_i \text{は} I \text{のコピー})$$

とすると、各 $1 \leqq i \leqq k$ に対し I_i の分割、

$$0 = t_{i_0} < t_{i_1} < \cdots < t_{i_s} = 1$$

が存在し、$i_0 \leqq j_i \leqq i_s$ に対し、k 個 の番号 $j_i \quad (1 \leqq i \leqq k)$ で決まる $n$cube を

$$J = [t_{1_{j_1}}, t_{1_{j_1}+1}] \times [t_{2_{j_1}}, t_{2_{j_1}+1}] \times \cdots \times [t_{k_{j_k}}, t_{k_{j_k}+1}]$$

とおくと、各 J に対し、$f(J) \subset U$ または、$f(J) \subset e_i$ となる。このような J のうち、$f(J) \subset U$ となるものの和集合を K,$f(J) \subset e_i$ となるものの和集合を L_i とおく。上記の分割が I^k の胞体分割を与えるため、K, L_i は I^k の部分複体である。

$$f_{|L_i} : (L_i, L_i \cap K) \longrightarrow (e_i, e_i - 0)$$

であり、

$$\pi_m(e_i, e_i - 0) \cong \pi_m(\mathrm{Int}D^n, \mathrm{Int}D^n - 0) \cong \pi_{m-1}(\mathrm{Int}D^n - 0) \cong \pi_{m-1}(S^{n-1})$$

であるから、$m \leqq n-1$ に対し、$\pi_m(e_i, e_i - 0) = 0$。また、$\dim L_i = k \leqq n-1$ なので、

$$^{\exists}f_i : L_i \longrightarrow e_i - 0 \qquad s.t \qquad f \simeq f_i \quad \mathrm{rel}\ L_i \cap K$$

よって、

$$f' = f_{|K} \cup (\cup f_i) : I^k \longrightarrow U$$

が定義できるが、これは、$\partial I^k \subset A \subset K$ であるため、$f \simeq f' \quad \mathrm{rel}\ \partial I^k$ さらに、U は A の強変位 retaract であるので、その retraction を r すれば、

$$g = r \circ f' : I^k \longrightarrow A$$

が構成できて、$f \simeq g \quad \mathrm{rel}\ \partial I^k$ となる。(D^k, S^{k-1}) で考えれば、$g : D^k \longrightarrow A$ で、$f \simeq g \quad \mathrm{rel}\ \partial S^{k-1}$ を満たすことになる。

□

Corollary 0.0.2

(X, A) を CW pair とすれば、$n \geqq 0$ に対し、$(X, \overline{X}^{(n)})$ は n 連結である。

proof) $m > n$ に対し、$(\overline{X}^{(m)}, \overline{X}^{(n)})$ が n 連結であるのを m に関する帰納法で示す。$m = n+1$ のときは、$\overline{X}^{(n+1)}$ が $\overline{X}^{(n)}$ に $n+1$cell を貼り付けた空間であるため、Prop 0.0.1 により成立。ここで、$m > n$ に対し、$(\overline{X}^{(m)}, \overline{X}^{n})$ が n 連結であったと仮定する。$(\overline{X}^{(m+1)}, \overline{X}^{(m)}, \overline{X}^{(n)})$ ホモトピー完全列を考えると、

$$\pi_i(\overline{X}^{(m)}, \overline{X}^{(n)}) \longrightarrow \pi_i(\overline{X}^{(m+1)}, \overline{X}^{(n)}) \longrightarrow \pi_i(\overline{X}^{(m+1)}, \overline{X}^{(m)})$$

が完全になるため、$i \geqq n$ に対し、$\pi_i(\overline{X}^{(m)}, \overline{X}^{(n)}) = \pi_i(\overline{X}^{(m+1)}, \overline{X}^{(m)}) = 0$ なので、$\pi_i(\overline{X}^{(m+1)}, \overline{X}^{(n)}) = 0$ となり、$(\overline{X}^{(m+1)}, \overline{X}^{(n)})$ が、n 連結となる。よって、$i \geqq n$ に対し、

$$0 = \pi_i(\overline{X}^{(m)}, \overline{X}^{(n)}) = \pi_i(\overline{X}^{(n+1)}, \overline{X}^{(n)}) = \pi_i(\overline{X}^{(n+2)}, \overline{X}^{(n)}) = \cdots = \pi_i(X, \overline{X}^{(n)})$$

が sequential colimit と homotopy 群の可換性からわかる。よって、$(X, \overline{X}^{(n)})$ は n 連結である。

□

Lemma 0.0.3

X, Y は CW 複体とし、$r \geqq 0$ に対し、$f_r : X \longrightarrow Y$ は、$f_r \simeq f_{r+1} \quad \mathrm{rel} \quad X^{(r)}$ であるとする。このとき、

$$f_\infty = \cup f_r|_{X^{(r)}} : X \longrightarrow Y$$

は連続であり、$f_\infty \simeq f_0$

proof) f_∞ が連続であることはわかる。$f_r \simeq f_{r+1}$ の homotopy を、

$$H_r : X \times I \longrightarrow Y$$

とおく。$H : X \times I \longrightarrow Y$ を次で定義する。

$$H(x,t) = H_r(x, (r+2)(1-(r+1)t)) \qquad \left(\frac{1}{r+2} \leqq t \leqq \frac{1}{r+1}\right)$$

$$H(x,0) = f_\infty(x)$$

$X \times I$ は CW 複体であり、$(X \times I)^{(r)} = X^{(r)} \times \partial I \cup X^{(r-1)} \times (0,1)$ であるため、H は各 $(X \times I)^{(r)}$ 上で連続なので、H が連続となる。

□

Theorem 0.0.4 胞体近似定理

$(X, A), (Y, B)$ を CW pair とし、連続写像

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

は、X の部分複体 Z 上で胞対写像であるとする。このとき、

$$g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

が胞体写像で、$f \simeq g$ rel Z となるものが存在する。

proof) $k \geqq -1$ に関して、$f_k : X \longrightarrow Y$ で、$\overline{X}^{(k)} \cup Z$ 上で胞体写像であり、$f_k \simeq f_{k-1}$ rel $\overline{X}^{(k-1)} \cup Z$ であるものが存在することを帰納的に示していく。$f_{-1} = f$

とおけば、$A \cup Z$ 上で胞体写像は間違いない。よって、$-1 \leqq k \leqq n-1$ まで条件を満たす写像 f_k が与えられたとする。

$$f_{n-1} : X \longrightarrow Y$$

に注目すれば、$\overline{X}^{(n-1)} \cup Z$ 上では胞体写像ということで、

$$f_{n-1} : (\overline{X}^{(n)}, \overline{X}^{(n-1)} \cup (\overline{X}^{(n)} \cap Z)) \longrightarrow (Y, \overline{Y}^{(n)})$$

と考え、$(Y, \overline{Y}^{(n)})$ が Cor 0.0.2 により、n 連結で、$\overline{X}^{(n)} - \overline{X}^{(n-1)} \cup (\overline{X}^{(n)} \cap Z)$ に含まれる cell の次元は n であるため、

$$^{\exists}g : \overline{X}^{(n)} \longrightarrow \overline{Y}^{(n)} \qquad s.t \qquad g \simeq f_{n-1} \quad \mathrm{rel} \quad \overline{X}^{(n-1)} \cup (\overline{X}^{(n)} \cap Z)$$

この homotopy を $H : \overline{X}^{(n)} \times I \longrightarrow Y$ とする。また、$G : Z \times I \longrightarrow Y$ を $G(z,t) = f_{n-1}(z)$ で定義すると、

$$F = H \cup G : \overline{X}^{(n)} \cup Z \times I \longrightarrow Y$$

が定義できる。$F_0 = f_{n-1}, F_1 = g$ である。ここで、次の可換図式、

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}^{(n)} \cup Z \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{X}^{(n)} \cup Z \times I \arrow[dl, "F"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "f_{n-1}"] \arrow[rr] & & X \times I
\end{tikzcd}$$

において、HEP を用いて、

$$\begin{tikzcd}
\overline{X}^{(n)} \cup Z \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{X}^{(n)} \cup Z \times I \arrow[dl, "F"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "f_{n-1}"] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\widetilde{F}"']
\end{tikzcd}$$

が存在するわけだが、$f_n = \widetilde{F}_1 : X \longrightarrow Y$ とおくと、$(x,t) \in \overline{X}^{(n-1)} \cup Z$ に対し、

$$\widetilde{F}(x,t) = F(x,t) = H \cup G(x,t) = f_{n-1}(x)$$

であるため、

$$f_n \simeq f_{n-1} \quad \text{rel} \quad \overline{X}^{(n-1)} \cup Z$$

であり、$m \geqq n$ に対し、

$$f_n((\overline{X}^{(n)} \cup Z) \cap \overline{X}^{(m)}) \subset g \cup f_{n-1}(\overline{X}^{(n)} \cup ((\overline{X}^{(n-1)} \cup Z) \cap \overline{X}^{(m)})) \subset \overline{Y}^{(n)} \cup \overline{Y}^{(m)} = \overline{Y}^{(m)}$$

であるため、f_n が $\overline{X}^{(n)} \cup Z$ 上で胞体写像であることがわかる。これより、

$$g = f_\infty = \cup f_n|_{\overline{X}^{(n)}} : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

が求める写像である。

$\square$

Corollary 0.0.5

X, Y を CW 複体とし、$f : X \longrightarrow Y$ を任意の連続写像とすると、胞体写像 $g : X \longrightarrow Y$ で $f \simeq g$ となるものが存在する。