Definition 0.0.1

基点つき空間 X に対し、

$$h : \pi_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$$

を次のように定義する。$[f] \in \pi_*(X)$ に対し、

$$f : S^n \longrightarrow X$$

であるため、$f_* : \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$ を考えれば、次元定理と懸垂定理から、$\widetilde{H}_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ なので、この生成元を i_n とおくとき、$h[f] = f_*(i_n)$ と定義する。これは後に示していくように well-defined で natural な準同型になるため、h を Hurewiz 準同型と呼ぶ。

Lemma 0.0.2

h : well-defined

proof) $[f], [g] \in \pi_n(X)$ に対し、$f \simeq g$ とすると、

$$f_* = g_* : \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$$

であるので、$h[f] = f_*(i_n) = g_*(i_n) = h[g]$

□

Lemma 0.0.3

h は準同型である。

proof) $[f], [g] \in \pi_n(X)$ に対し、$\pi_n(X)$ での積は、

$$S^n \xrightarrow{p} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\Gamma} X$$

の合成が代表元である。ここで p は pintch 写像、Γ は fold 写像である。ここで、

$$q_i : S^n \vee S^n \longrightarrow S^n$$

は $i = 1, 2$ に対し、前方・後方の S^n を潰す projection である。

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "p"] \arrow[d, "="'] & S^n \vee S^n \arrow[d, "q_i"] \\
S^n \arrow[r, "="'] & S^n
\end{tikzcd}$$

の図式を考えると、p, q_i を合成したものは S^n の下半分、上半分を潰す projection であるので、北極点、南極点に向かって cover していくことを考えれば図式は homotopy 可換である。これより、

$$q : \widetilde{H}_n(S^n \vee S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(S^n) \oplus \widetilde{H}_n(S^n)$$

を、$q(x) = (q_{1*}(x), q_{2*}(x))$ で定義すると、

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "="'] & \widetilde{H}_n(S^n \vee S^n) \arrow[d, "q"] \\
\widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "copy"'] & \widetilde{H}_n(S^n) \oplus \widetilde{H}_n(S^n)
\end{tikzcd}$$

が可換となる。q は加法性定理の同型の逆写像であることがわかるので、

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "copy"] \arrow[d, "="'] & \widetilde{H}_n(S^n) \oplus \widetilde{H}_n(S^n) \arrow[d, "i_{1*}+i_{2*}"] \\
\widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "p_*"'] & \widetilde{H}_n(S^n \vee S^n)
\end{tikzcd}$$

が可換である。これを踏まえれば、次の図式が可換であることもわかる。

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "copy"] \arrow[d, "="'] & \widetilde{H}_n(S^n) \oplus \widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "f_* \oplus g_*"] \arrow[d, "i_{1*}+i_{2*}"] & \widetilde{H}_n(X) \oplus \widetilde{H}_n(X) \arrow[r, "+"] \arrow[d, "i_{1*}+i_{2*}"] & \widetilde{H}_n(X) \arrow[d, "="] \\
\widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "p_*"'] & \widetilde{H}_n(S^n \vee S^n) \arrow[r, "f \vee g_*"'] & \widetilde{H}_n(X \vee X) \arrow[r, "\Gamma_*"'] & \widetilde{H}_n(X)
\end{tikzcd}$$

これにより、

$$h([f] + [g]) = (f + g)_*(i_n) = f_*(i_n) + g_*(i_n) = h[f] + h[g]$$

□

Lemma 0.0.4

h は natural である。つまり、基点を保つ写像 $\alpha : X \longrightarrow Y$ に対し、次の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & \widetilde{H}_n(X) \arrow[d, "\alpha_*"] \\ \pi_n(Y) \arrow[r, "h"'] & \widetilde{H}_n(Y) \end{tikzcd}$$

proof)　　ほぼ関手の定義から明らかである。$[f] \in \pi_n(X)$ に対し、

$$h \circ \alpha_*[f] = h[\alpha \circ f] = (\alpha \circ f)_*(i_n) = \alpha_* \circ f_*(i_n) = \alpha_* \circ h[f]$$

$\square$

Lemma 0.0.5

h は susepension と可換である。つまり、

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Sigma"'] & \widetilde{H}_n(X) \arrow[d, "\Sigma"] \\ \pi_{n+1}(\Sigma X) \arrow[r, "h"'] & \widetilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \end{tikzcd}$$

は可換である。

proof)　　$[f] \in \pi_n(X)$ に対し、$i_n \in \widetilde{H}_n(S^n)$ は生成元で、

$$\Sigma : \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_{n+1}(S^{n+1})$$

の同型により、$\Sigma i_n = i_{n+1}$ であるため、

$$\Sigma \circ h[f] = \Sigma \circ f_*(i_n) = (\Sigma f)_* \circ \Sigma(i_n) = (\Sigma f)_*(i_{n+1}) = h[\Sigma f] = h \circ \Sigma[f]$$

$\square$

続いて Hurewiz 準同型が同型になる状況を考えてみよう。

Lemma 0.0.6

A, B : アーベル群 , $A \cong B \cong \mathbf{Z}$, $f : A \longrightarrow B$ hom に対し、

i_A , i_B を、A, B の生成元とする。このとき、$f(i_A) = i_B \implies f$: 同型

proof) まず全射を示す。$^\forall b \in B$ に対し、$^\exists n \in \mathbf{Z}$ $s.t$ $b = n \cdot i_B$ なので、

$$a = n \cdot i_A \quad \in A \quad \text{に対し、} f(a) = f(n \cdot i_A) = n \cdot f(i_A) = n \cdot i_B = b$$

次に単射を示す。$a \in A$ に対し、$f(a) = 0$ とする。

$$^\exists n \in \mathbf{Z} \quad s.t \quad a = n \cdot i_A$$

なので、$f(a) = f(n \cdot i_A) = n \cdot f(i_A) = n \cdot i_B = 0$ より、$n = 0$ $\therefore$ $a = 0$

□

この証明で重要なのは、アーベル群が 1 元生成だからである。

Theorem 0.0.7

$X = S^n$ の時、

$$h : \pi_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$$

は同型である。

proof) $[1_{S^n}] \in \pi_n(S^n)$ は生成元であり、その行き先は、

$$h[1_{S^n}] = (1_{S^n})_*(i_n) = i_n$$

であり、生成元が生成元に移っているので、Lemma 0.0.6 より、同型である。

□

Proposition 0.0.8

$n \geqq 2$ のとき、

$$\sum i_{\lambda *} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \pi_n(S^n) \longrightarrow \pi_n(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} S^n_\lambda)$$

は同型である。

proof)　　まず S^n が２個の場合を考えよう。

S^n の基点を e_0 とすると、$S^n = e_n \cup e_0$ で CW complex であった。

$$\text{よって、} S^n \times S^n = (e_n \times e_n) \cup (e_n \times e_0) \cup (e_0 \times e_n) \cup (e_0 \times e_0)$$

の分割で $S^n \times S^n$ は CW complex である。胞体の数は４つ。次元は $2n$ である。

詳しく言うと、$2n$-cell が１つ、n-cell が２つ、0-cell が１つである。

これより、$n \leqq m \leqq 2n-1$ に対し、

$$S^n \times S^n \text{の } m\text{-skelton} \quad = S^n \times e_0 \cup e_0 \times S^n = S^n \vee S^n$$

ここで、対空間のホモトピー群の完全列を思い出すと、

$$\pi_{n+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \longrightarrow \pi_n(S^n \vee S^n) \longrightarrow \pi_n(S^n \times S^n) \longrightarrow \pi_n(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$$

が完全列であり、$n \geqq 2$ に対し、$2n-1 \geqq n+1$ なので、胞体近似定理より、

$$f \ : \ (D^{n+1}, S^n) \longrightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \quad \text{は、}$$

$$D^{n+1} \text{が } (n+1) \text{ 次元の CW complex だから、}$$

$$^{\exists} g \ : \ (D^{n+1}, S^n) \longrightarrow (S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \quad \text{s.t} \quad g(D^{n+1}) \subset S^n \vee S^n \ , \ g \simeq f$$

$$\therefore \quad \pi_{n+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) = \pi_n(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) = 0$$

これより、$j \ : \ S^n \vee S^n \longrightarrow S^n \times S^n$　inclusion により、

$$j_* \ : \ \pi_n(S^n \vee S^n) \longrightarrow \pi_n(S^n \times S^n) \ : \ \text{同型}$$

また、$p \ : \ \pi_n(S^n \times S^n) \longrightarrow \pi_n(S^n) \times \pi_n(S^n) = \pi_n(S^n) \bigoplus \pi_n(S^n)$

の同型があったことを思い出すと、

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(S^n) \bigoplus \pi_n(S^n) \arrow[rr, "i_* + i_*"] & & \pi_n(S^n \vee S^n) \arrow[dl, "i_*"] \\
& \pi_n(S^n \times S^n) \arrow[ul, "p"] &
\end{tikzcd}$$

が可換になっている。よって、

$$i_* + i_* \ : \ \pi_n(S^n) \bigoplus \pi_n(S^n) \longrightarrow \pi_n(S^n \vee S^n) \qquad \text{同型}$$

これより、有限個の S^n の wedge に対しても同様のことが言える。ただこのままの議論を無限個に拡張できないのは、無限個の直積空間が CW かどうかが定かでないからである。しかし、今の場合、

$$[f] \in \pi_n(\bigvee S^n_\lambda) \quad \text{とすると、} \quad f \ : \ S^n \longrightarrow \bigvee S^n_\lambda \quad \text{であるが、}$$

ここで、定義域の S^n が compact なので、$^{\exists}\lambda_1 \ , \cdots , \lambda_k \in \Lambda$ s,t

$$f(S^n) \subset \bigvee_{i=1}^{k} S^n_{\lambda_i}$$

となり、有限の議論ができるわけである。 □

Proposition 0.0.9

$n \geqq 2$、$X = \displaystyle\bigvee_{\lambda \in \Lambda} S^n_\lambda$ の時、

$$h : \pi_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$$

は同型である。

proof) 下の図式が可換なので、明らか。

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus \pi_n(S^n) \arrow[r, "\oplus h"] \arrow[d, "\cong"'] & \bigoplus \widetilde{H}_n(S^n) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_n(\vee S^n) \arrow[r, "h"'] & \widetilde{H}_n(\vee S^n)
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 0.0.10

X を CW 複体とし、$i : X^{(n+1)} \longrightarrow X$ を inclusion とすると、

$$i_* : \pi_n(X^{(n+1)}) \longrightarrow \pi_n(X)$$

は同型である。

proof)　　$(X^{(n+2)}, X^{(n+1)})$ は $n+1$ 連結であるので、homotopy 完全列により、

$$i_{n+1*} : \pi_n(X^{(n+1)}) \longrightarrow \pi_n(X^{(n+2)})$$

は同型であるため、この構成を繰り返すことで、

$$\pi_n(X^{(n+1)}) \cong \pi_n(X^{(n+2)}) \cong \pi_n(X^{(n+3)}) \cong \cdots$$

であるため、

$$i_* : \pi_n(X^{(n+1)}) \longrightarrow \pi_n(X)$$

が同型となる。

□

Theorem 0.0.11　　*Hurewiz* 定理

X が $n-1$ 連結であるとき、

$$h \ : \ \pi_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$$

は同型である。

proof)　　任意の位相空間は CW 複体の弱ホモトピー型を持つため、X は CW 複体と仮定して問題ない。また、次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X^{(n+1)}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_*"'] & \widetilde{H}_n(X^{(n+1)}) \arrow[d, "i_*"] \\
\pi_n(X) \arrow[r, "h"'] & \widetilde{H}_n(X)
\end{tikzcd}$$

において、縦列は Lemma　0.0.10 と cellular chain のホモロジーから双方とも同型である。よって、$n+1$-skelton 上での Hurewiz 準同型が同型になること示せばよい。ところで $n-1$ 連結ということは、0-cell が 1 つで、$1 \leqq k \leqq n-1$ において k-cell は存在しない。よって、n-skelton は $\vee S^n$ であり、$n+1$-skelton は $\vee S^n$ に $\coprod D^{n+1}$ を特性写像により境界で貼り付けた空間である。$D^{n+1} \cong CS^n$ であるため、$X^{(n+1)}$ は、$n+1$ 次元の特性写像から定義される、

$$\varphi : \vee S^n_\omega \longrightarrow \vee S^n_\lambda$$

の homotopy cofiber、C_φ と考えることができる。ところで、

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "h"] & \pi_n(\vee S^n_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \pi_n(X^{(n+1)}) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
\widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r, "\varphi_*"'] & \widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r] & \widetilde{H}_n(X^{(n+1)}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の図式は可換であり、左二つの縦が Theorem 0.0.7 により同型である。また、

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \widetilde{H}_n(M_\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "r_*"', "\cong"] & \widetilde{H}_n(C_\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \widetilde{H}_{n-1}(\vee S^n_\omega) = 0 \\
\widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r, "\varphi_*"'] & \widetilde{H}_n(\vee S^n_\lambda) \arrow[r] & \widetilde{H}_n(X^{(n+1)}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の可換図式で上列は cofibration があるため完全性定理により完全なので、下列も完全である。一方 π_* で考えていけば、$M_\varphi, \vee S^n$ は共に $n-1$ 連結であるため、projection

$$p : (M_\varphi, \vee S^n_\omega) \longrightarrow (X^{(n+1)}, *)$$

は $2n-1$ 連結である。よって、

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \pi_n(M_\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "r_*"', "\cong"] & \pi_n(M_\varphi, \vee S^n_\omega) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"', "\cong"] & \pi_{n-1}(\vee S^n_\omega) = 0 \\
\pi_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r, "\varphi_*"'] & \pi_n(\vee S^n_\lambda) \arrow[r] & \pi_n(X^{(n+1)}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の可換図式で、上列は対の完全列であるから、下列も完全となる。よって元の、

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "h"] & \pi_n(\vee S^n_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \pi_n(X^{(n+1)}) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
\widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r, "\varphi_*"'] & \widetilde{H}_n(\vee S^n_\omega) \arrow[r] & \widetilde{H}_n(X^{(n+1)}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の図式において five lemma が用いられ、

$$h : \pi_n(X^{(n+1)}) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X^{(n+1)})$$

が同型になることが示された。

$\square$