実射影空間のホモロジー群

CW 複体のホモロジー群を用いて、実射影空間のホモロジー群を計算してみる。可縮な空間の次に考えるのが球面ならば、射影空間は球面の次に考えるべき空間ともいえる。

1 射影空間

射影空間の定義は様々あるが、ここでは球面 S^n の商空間として定義する。

定義 1.1. $x, y \in S^n$ に対し、$x \sim y \Longleftrightarrow x = y$, または, $x = -y$ と定義するとこれは同値関係になり、

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \sim$$

と定義し、n 次元実射影空間とよぶ。赤道への包含写像、$S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ は、単射 $\mathbb{R}P^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ を誘導するため、この対応により、$\mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$ と見なす。

定義より射影空間は、球面の 2 点の同値類からなる空間である。これは別の言い方をすると、$\mathbb{Z}_2$ の S^n への作用を、$(-1) \cdot x = -x$ で定めたときの軌道空間 $S^n/\mathbb{Z}_2$ と考えることもできる。

補題 1.2. $\mathbf{R}P^n$ は弧状連結なコンパクト Hausdorff 空間である。

証明 S^n が弧状連結なコンパクトよりその商空間も弧状連結でコンパクトである。Hausdorff 性に関しては、$[x], [y] \in \mathbf{R}P^n$ に対し、$[x] \neq [y]$ とすると、$x \neq y$ かつ、$x \neq -y \in S^n$ ということである。S^n は距離空間なので、

$$\epsilon = \frac{1}{3} \min\{d(x, y), d(x, -y), d(-x, y)\ ,\ d(-x, -y)\}$$

とおけば、$U = U_\epsilon(x) \cup U_\epsilon(-x)$, $V = U_\epsilon(y) \cup U_\epsilon(-y)$ において、射影 $p : S^n \longrightarrow \mathbf{R}P^n$ の像、$p(U)$, $p(V)$ はともに開集合であり、$p(U) \cap p(V) = \phi$ である。 □

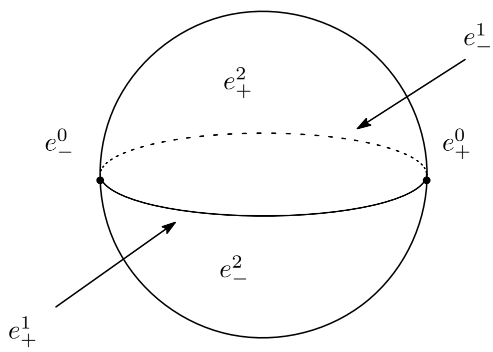
注意 1.3. $\mathrm{R}P^n$ は S^n の商空間により定義したが、球面を $S^n = S^n_+ \cup S^n_- \cup S^{n-1}$ と上下半球面と赤道部分に分けて考えると、まず S^n_+ と S^n_- が同一視され、残りの赤道 S^{n-1} で同値関係を考えればよい。つまり、$\mathbb{R}P^n$ は D^n の境界部分の S^{n-1} で同値関係により割った空間とも考えられる。例えば、$\mathbb{R}P^n \cong [-1, 1]/1 \simeq (-1) \cong S^1$ である。このことは次で考える胞体分割の構造を示唆している。

2 射影空間の胞体分割

射影空間の胞体分割は球面の分割から誘導される。問題は球面のどんな分割を選ぶかであるが、同値関係と相性の良い分割としては、

$$S^n = e^0_+ \cup e^0_- \cup e^1_+ \cup \cdots \cup e^n_+ \cup e^n_-$$

という分割である。ただし、$e^m_{+(-)}$ は S^n の部分空間 S^m の上半分（下半分）の内部である。



これは胞体の数は $2n$ 個あり、m-骨格は S^m である。射影空間の同値関係をみれば、m-次元の２枚ある胞体が同一視される。

注意 2.1. $p: S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ を射影としたとき、$\mathbf{R}P^n = \bigcup_{1 \leqq i \leqq n} p(e_+^i)$ は胞体分割であり、これを改めて、

$$\mathbf{R}P^n = \bigcup_{1 \leqq i \leqq n} e^i$$

とかく。よって実射影空間は各次元に１つずつの胞体をもつ CW 複体であり、m-骨格は $\mathbb{R}P^m$ である。

ではこの分割を使って射影空間のホモロジー群を求める。

補題 2.2. $1 \leqq i \leqq n+1$ に対し、$r_i^n: S^n \longrightarrow S^n$ を、

$$r_i^n(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, -x_i, \cdots, x_{n+1})$$

により定義する。このとき、そこから誘導される写像 $(r_i^n)_*: \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(S^n)$ は、$(r_i^n)_* = -1$ である。

証明 まず、$r_1^0: S^n \longrightarrow S^n$ について示す。$S^0 = \{1, -1\}$ で、$1 \in S^0$ を基点と考えている。このとき、$\sigma: \Delta^0 \longrightarrow S^0$ を $\sigma(e_0) = -1$ で与えると、これが $\widetilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$ の生成元である。よって、$(r_1^0)_*(\sigma)(e_0) = 1 = -\sigma(e_0)$ なので、$(r_1^0)_* = -1$ である。次に $n \geqq 1$ において、懸垂同型 $\Sigma: \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \widetilde{H}_n(S^n)$ を考える、$r_1^{n-1}: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ に対し、r_1^{n-1} は第一成分、Σr_1^{n-1} は最後の成分に関わる写像なので、$\Sigma r_1^{n-1} = r_1^n: S^n \longrightarrow S^n$ であることを注意すると、$\Sigma \circ (r_1^{n-1})_* = (r_1^n)_* \circ \Sigma$ となる。よって、$(r_1^n)_* = \Sigma^{-1} \circ (r_1^{n-1})_* \circ \Sigma$ となり、帰納的に $(r_1^n)_* = -1$ が示せる。

次に、$1 \leqq i \leqq n$ に対して、$f_i: S^n \longrightarrow S^n$ を

$$(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n+1}) \mapsto (x_i, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_1, x_i, \cdots, x_{n+1})$$

で定義するとこれは同相であり、$r_i^n \circ f_i = f_i \circ r_1^n$ となる。よって、$(r_i^n) = (f_i)_* \circ (r_1^n)_* \circ (f_i)_*$ なので、$(r_i^n)_* = -1$ がいえる。 □

系 2.3. $r: S^n \longrightarrow S^n$ を、$r(x) = -x$ で定義すると、誘導される写像

$$r_*: \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(S^n)$$

は、$r_* = (-1)^{n+1}$ である。

証明 $r = r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_{n+1}$ による。 □

補題 2.4. a $p: (S^n, S^{n-1}) \longrightarrow (\mathbf{R}P^n, \mathbf{R}P^{n-1})$ を射影、$j: (S^n, *) \longrightarrow (S^n, S^{n-1})$ を包含写像をしたとき、

$$(p \circ j)_*: \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow H_n(\mathbf{R}P^n, \mathbf{R}P^{n-1})$$

は、n が偶数のとき 0 写像であり、奇数のとき同型 $f: \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow H_n(\mathbf{R}P^n, \mathbf{R}P^{n-1})$ が存在し、$(p \circ j)_* = 2f$ となる。

証明 次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{H}_n(S^n) \arrow[dll, "(j_1)_*"'] \arrow[drr, "(j_2)_*"] \arrow[dd, "j_*"'] & & \\
H_n(S^n, S^n_+) & & & & H_n(S^n, S^n_-) \\
 & & H_n(S^n, S^{n-1}) \arrow[ull, "(m_1)_*"] \arrow[urr, "(m_2)_*"'] \arrow[dd, "p_*"'] & & \\
H_n(S^n_-, S^{n-1}) \arrow[uu, "(l_1)_*"] \arrow[urr, "(i_1)_*"] \arrow[drr, "(p_1)_*"'] & & & & H_n(S^n_+, S^{n-1}) \arrow[uu, "(l_2)_*"'] \arrow[ull, "(i_2)_*"'] \arrow[dll, "(p_2)_*"] \\
 & & H_n(\mathbf{R}P^n, \mathbf{R}P^{n-1}) & &
\end{tikzcd}$$

ここで、S^n_+, S^n_- はそれぞれ S^n の上、下半球面であり、p_k は射影、j_k, i_k, l_l, m_k はすべて包含写像である $(k = 1, 2)$。

まず、$(S^n, S^n_\pm)$ のホモロジー完全列で $S^n_\pm$ は可縮なので、$(j_k)_*$ は同型である。また切除定理から、$(l_k)_*$ も同型である。

CW 複体のホモロジーの議論から、$\varphi_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_n(\mathbf{R}P^n, \mathbf{R}P^{n-1})$ は同型であった。このとき、$D^n \cong S^n_\pm$ と考えることにより、特性写像 $\varphi = p_k$ なので、$(p_k)_*$ も同型。

次に、$a \in H_n(S^n, S^{n-1})$ の別の表記を考えてみる。

$$(m_1)_*(a - (i_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (m_1)_*(a)) = (m_1)_*(a) - (m_1)_*(a) = 0$$

であるため、$a - (i_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (m_1)_*(a) \in \mathrm{Ker}(m_1)_* = \mathrm{Im}(i_2)_*$ なので、$b \in H_n(S^n_-, S^{n-1})$ が存在し、

$$(i_2)_*(b) = a - (i_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (m_1)_*(a) \quad \cdots \quad *$$

となる。ここで、

$$(l_2)_*(b) = (m_2)_* \circ (i_2)_*(b) = (m_2)_*(a - (i_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (m_1)_*(a)) = (m_2)_*(a)$$

が完全性により成り立つ。よって、$b = (l_2)_*^{-1} \circ (m_2)_*(a)$ であり、これを $*$ に代入すると、

$$(i_2)_* \circ (l_2)_*^{-1} \circ (m_2)_*(a) = a - (i_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (m_1)_*(a)$$

であるため、

$$a = (i_2)_* \circ (l_2)_*^{-1} \circ (m_2)_*(a) + (i_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (m_1)_*(a)$$

と書くことができる。$x \in \widetilde{H}_n(S^n)$ に対し、$j_*(x) \in H_n(S^n, S^{n-1})$ をこの形で書き直し、p_* を施すと、

$$\begin{aligned}
p_* \circ j_*(x) &= p_*((i_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (m_1)_* \circ j_*(x) + (i_2)_* \circ (l_2)_*^{-1} \circ (m_2)_* \circ j_*(x)) \\
&= p_*((i_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (j_1)_*(x) + (i_2)_* \circ (l_2)_*^{-1} \circ (j_2)_*(x)) \\
&= (p_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (j_1)_*(x) + (p_2)_* \circ (l_2)_*^{-1} \circ (j_2)_*(x)
\end{aligned} \tag{1}$$

ここで、最初と後ろの項の関係であるが、$r : S^n \longrightarrow S^n$, $r(x) = -x$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "(m_2)_*"] \arrow[d, "r_*"] & H_n(S^n, S^n_-) \arrow[d, "r_*"] & H_n(S^n_+, S^{n-1}) \arrow[l, "(l_2)_*"'] \arrow[r, "(p_2)_*"] \arrow[d, "r_*"] & H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \arrow[d, "="] \\
\widetilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "(m_1)_*"'] & H_n(S^n, S^n_+) & H_n(S^n_-, S^{n-1}) \arrow[l, "(l_1)_*"] \arrow[r, "(p_1)_*"'] & H_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1})
\end{tikzcd}$$

は可換である。よって、系 2.3 ともあわせると (2) は、

$$p_* \circ j_*(x) = (p_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (j_1)_*(x) + ((p_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (j_1)_* \circ r_*(x) = (1 + (-1)^{n+1})(p_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (j_1)_*(x)$$

よって、$f = (p_1)_* \circ (l_1)_*^{-1} \circ (j_1)_*$ とおけば、これは同型で、n が偶数ならば、$(p \circ j)_*(x) = 0$ で、n が奇数ならば、$(p \circ j)_*(x) = 2f(x)$ である。 □

定理 2.5.

$$H_m(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & m \text{ が奇数かつ、} 0 < m < n \\ \mathbb{Z} & m = 0\text{、または、}m \text{ が奇数かつ、} m = n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

証明 場合分けを行って確かめる。

$$\begin{tikzcd} H_m(D^m, S^{m-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \widetilde{H}_{m-1}(S^{m-1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p_*"'] & H_{m-1}(S^{m-1}, S^{m-2}) \arrow[d, "p_*"'] \\ H_m(\mathbb{R}P^m, \mathbb{R}P^{m-1}) \arrow[r, "\partial"'] & \widetilde{H}_{m-1}(\mathbb{R}P^{m-1}) \arrow[r, "j_*"'] & H_{m-1}(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{R}P^{m-2}) \end{tikzcd}$$

ここで、φ_* は同型である。補題??により、m が奇数ならば、$p_* \circ j_* = 0$ だったので、CW ホモロジーの微分

$$\partial_m = j_* \circ \partial : H_m(\mathbb{R}P^m, \mathbb{R}P^{m-1}) \longrightarrow H_m(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{R}P^{m-2})$$

は 0 である。また、m が偶数のときは、$p_* \circ j_* = 2f$ と書け、$g = f \circ \partial \circ \varphi_*^{-1}$ とおけば、$\partial_m = 2g$ で単射であることがわかる。よって、

1. $m > n$ のときは、$\mathbb{R}P^n$ の CW 複体としての次元を超えるので、$H_m(\mathbb{R}P^n) = 0$ である。
2. $m = 0$ のとき、$\mathbb{R}P^n$ は弧状連結なので、$H_0(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$ である。
3. $0 < m \leqq n$ で、n が偶数のとき、$\mathrm{Im}\partial_{m+1} = 0$, $\mathrm{Ker}\partial_m = 0$ より、$H_m(\mathbb{R}P^n) = 0$ である。
4. $0 < m < n$ で、m が奇数のとき、

$$\mathrm{Im}\partial_{m+1} = \{2g(x) \mid x \in H_{m+1}(\mathbb{R}P^{m+1}, \mathbb{R}P^m) \cong \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z}$$

   そして、$\mathrm{Ker}\partial_m = H_m(\mathbb{R}P^m, \mathbb{R}P^{m-1}) \cong \mathbb{Z}$ なので、$H_m(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ となる。

5. $m = n$ で、m が奇数のとき、$H_{m+1}(\mathbb{R}P^{m+1}, \mathbb{R}P^m) = 0$ なので、$\mathrm{Im}\partial_{m+1} = 0$ よって、上の場合と同様に考えると、$H_m(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$ となる。

□