Lemma 0.0.1

X を位相空間、$B \subset A \subset X$ とする。

$$i : A \longrightarrow X \ , \ j : B \longrightarrow A$$

がともに、cofibration であるならば、$k = i \circ j : B \longrightarrow X$ も cofibration である。

proof)　　次が可換とする。

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "k"'] & & B \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I
\end{tikzcd}$$

このとき、j が cofibration より、次の可換図において

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "j"'] & & B \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
A \arrow[ur, "f_{|A}"] \arrow[rr, "i_0"'] & & A \times I \arrow[ul, dotted, "{}^{\exists}G"']
\end{tikzcd}$$

を可換にする $G : A \times I \longrightarrow Y$ が存在し、i が cofibration より、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "{}^{\exists}F"']
\end{tikzcd}$$

を可換にする $F : X \times I \longrightarrow Y$ が存在するが、これが、

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "k"'] & & B \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \arrow[ul, "F"']
\end{tikzcd}$$

を可換にすることはすぐにわかる。

$\square$

Theorem 0.0.2

(X, A) が CW pair とすると、$i : A \longrightarrow X$ は cofibration である。

proof)　　$n \geqq 0$ に対し、$X - A$ の n 胞体の特性写像を φ_λ とすると、

$$\overline{X}^n \cong \overline{X}^{n-1} \cup (\coprod D_\lambda^n) \cong \overline{X}^{n-1} \cup C(\coprod S^{n-1})$$

であるため、$i_n : \overline{X}^{n-1} \longrightarrow \overline{X}^n$ は写像錐の底面に対応させる写像だから cofibratiuon。これより、

$$A = \overline{X}^{(-1)} \longrightarrow \overline{X}^{(0)} \longrightarrow \overline{X}^{(1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}^{(n)} \longrightarrow \overline{X}^{(n+1)} \cdots$$

という cofibration の列が誕生するが、Lemma 0.0.1 と $X = \bigcup \overline{X}^{(n)}$ であることから、

$$i : A \longrightarrow X$$

は cofibtration である。

Corollary 0.0.3

(X, A) が CW pair ならば、これは NDR pair である。

Theorem 0.0.4

$m, n \in \mathbf{Z}$ において、$0 \leqq m < n \leqq \infty$ とする。(X, A) : CW pair で、(Y, B) を空間対とする。$X - A$ の任意の胞体 e は $m \leqq \dim e \leqq n$ であるとし、さらに、$m \leqq i \leqq n$ に対し、$\pi_i(Y, B) = 0$ と仮定する。このとき、

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

に対し、

$$ {}^{\exists}g : X \longrightarrow B \qquad s.t \qquad f \simeq g \ rel \ A $$

proof)　　$-1 \leqq k$ に対し、

$$ g_k : \overline{X}^{(k)} \longrightarrow B \qquad s.t \qquad f \simeq g_k \quad rel \ A $$

の存在を k に関する帰納法で示す。

$-1 \leqq k \leqq m$ のとき、$\overline{X}^{(k)}$ に対し、

$$ g_k : \overline{X}^{(k)} \longrightarrow B $$

を次で定義する。仮定より、$\overline{X}^{(k)} \subset A$ であるため、$\overline{X}^{(k)} = A$ より、$g_k = f$ とおくと題意を満たす。よって、$m < k < n$ に対し、

$$ {}^{\exists}g_k : \overline{X}^{(k)} \longrightarrow B \qquad s.t \qquad f \simeq g_k \quad rel \ A $$

が存在すると仮定する。このとき、

$$ H : \overline{X}^{(k)} \times I \longrightarrow Y $$

を f と g_k を繋ぐホモトピーとすると、次の可換図、

$$
\begin{tikzcd}
\overline{X}^{(k)} \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & \overline{X}^{(k)} \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I
\end{tikzcd}
$$

を考えると、$\overline{X}^{(k)} \hookrightarrow X$ が cofibration であるため、次を可換にする写像が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
\overline{X}^{(k)} \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & \overline{X}^{(k)} \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}
$$

よって、$f_k = \widetilde{H}_1 : X \longrightarrow Y$ とおくと、

$$f_k(A) = \widetilde{H}_1(A) = H_1(A) = g_k(A) \subset B$$

であるため、$f_k : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ であり、また、$f_k \simeq f \quad rel\ A$ である。

$$\varphi_\lambda : (D^{k+1}, S^k) \longrightarrow (\overline{X}^{(k+1)}, \overline{X}^{(k)})$$

を $X - A$ の $k+1$ 次元 cell の特性写像とする。

$$f_k \circ (\cup\varphi_\lambda) : \coprod (D^{k+1}, S^k) \longrightarrow (Y, B)$$

各 $f_k \circ \varphi_\lambda \in \pi_{k+1}(Y, B) = 0$ であるため、

$$^\exists h_\lambda : D^{k+1} \longrightarrow B \qquad s.t \qquad f_k \circ \varphi_\lambda \simeq h_\lambda\ rel\ S^k$$

よって、$h = \cup h_\lambda$ とおくと、$f_k \circ (\cup\varphi_\lambda) \simeq h\ rel\ \coprod S^k$。これより、

$$g_{k+1} : \overline{X}^{(k+1)} \cong \overline{X}^k \cup (\coprod D^{k+1}) \xrightarrow{f_k \cup h} B$$

が、定義される。これは、$g_{k+1} \simeq f_k \quad rel\ \overline{X}^{(k)}$ なので、$g_{k+1} \simeq f \quad rel\ A$

よって、$k \geqq n$ のときは、仮定により、$\overline{X}^{(k)} = \overline{X}^{(n)}$ であるため、$g_k = g_n$ で定義すればよい。これより、すべての k において、g_k が定義できた。よって、

$$g = \mathrm{colimi} g_k : X \longrightarrow B$$

に対し、$f \simeq g \quad rel\ A$ である。

□

（注：定義域、値域等があってないところが多々あるが、inclusion や制限を省いている。）

Corollary 0.0.5

$m, n \in \mathbf{Z}$ において、$0 \leqq m < n \leqq \infty$ とする。(X, A) : CW pair で、(Y, B) を空間対とする。$X - A$ の任意の胞体 e は $m \leqq \dim e \leqq n$ であるとし、さらに、$m \leqq i \leqq n+1$ に対し、$\pi_i(Y, B) = 0$ と仮定する。このとき、

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

に対し、

$$g : X \longrightarrow B \qquad s.t \qquad f \simeq g \; rel \; A$$

は A を とめて homotopic を除いて一意に存在する。

proof)　存在は Theorem 0.0.4 で示した。よって、

$$g, h : X \longrightarrow B \qquad s.t \qquad f \simeq g \;,\; f \simeq h \quad rel \; A$$

とする。このまま素直に推移的に示せないのは、正確に言えば、$i : B \longrightarrow Y$: inclusion に対し、$f \simeq i \circ g \;,\; f \simeq i \circ h \quad rel \; A$ に注意しなければならないからだ。しかしこれより、$i \circ g \simeq i \circ h \quad rel \; A$ は言えるため、この homotopy は、

$$H : (X \times I, X \times \partial I \cup A \times I) \longrightarrow (Y, B)$$

と見なすことができる。ところで、$(X \times I, X \times \partial I \cup A \times I)$ は CW pair であり、$\times I$ されたことで、$X \times \partial I$ 以外の胞体の次元がもとの X に比べ $+1$ されたことに注意すれば、$X \times I - X \times \partial I \cup A \times I$ の任意の胞体 e の次元は $m + 1 \leqq \dim \leqq n + 1$ である。仮定より、$m \leqq i \leqq n + 1$ に対し、$\pi_i(Y, B) = 0$ なので、Theorem refexists が用いることができて、

$$^{\exists}G : X \times I \longrightarrow B \qquad s.t \qquad G \simeq H \quad rel \; X \times \partial I \cup A \times I$$

これより、$g \overset{G}{\simeq} h \quad rel \; A$ である。

□

Proposition 0.0.6

(X, A) は CW pair で $\dim(X - A) \leqq n$ とする。B が $(n-1)$ 連結 ならば、任意の連続写像

$$f : A \longrightarrow B$$

は X 上に拡張できる。

proof)　$k \geqq -1$ に対する帰納法を用いる。$k = -1$ のとき、$A = \overline{X}^{(-1)}$ であるため、$f_k = f : \overline{X}^{(-1)} \longrightarrow B$ と見なせばよい。$-1 < k \leqq n - 1$ に対し、

$$f_k : \overline{X}^k \longrightarrow B$$

が f の拡張とする。このとき、$X-A$ に含まれる次元 $k+1$ の cell の特性写像、

$$\varphi_\lambda : (D^{k+1}, S^k) \longrightarrow (\overline{X}^{(k+1)}, \overline{X}^{(k)})$$

に対し、$f_k \circ \varphi_{\lambda}|_{S^k} : S^k \longrightarrow B$ を考えると、B が $n-1$ 連結であるので、$f_k \circ \varphi_{\lambda}|_{S^k}$ は D^{k+1} に拡張可能である。それを、$g_\lambda : D^{k+1} \longrightarrow B$ とおく。

$$f_{k+1} = f_k \cup (\cup g_\lambda) : X^{(k+1)} \cong X^k \cup (\coprod D^k_\lambda) \longrightarrow B$$

と定義すると、これもまた f の拡張である。よって、$k=n-1$ のとき、

$$f_n : \overline{X}^{(n)} = X \longrightarrow B$$

は f の拡張である。

$\square$

Corollary 0.0.7

(X, A) は CW pair で $\dim(X-A) \leqq n$ とする。B が $(n-1)$ 連結 ならば、任意の連続写像

$$f : A \longrightarrow B$$

は A を止めて homotopic を除き X 上に一意に拡張できる。

Theorem 0.0.8

X, Y を位相空間とし、K を CW 複体とする。$f : X \longrightarrow Y$ が n 同値 $(1 \leqq n \leqq \infty)$ ならば、

$$f_* : [K, X]_* \longrightarrow [K, Y]_*$$

は、$\dim K < n$ のとき単射であり、$\dim K \leqq n$ のとき全射である。

proof) M_f, X, Y の関係は、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & M_f \\ & Y \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

は homotopy 可換であり、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & M_f \arrow[dl, "r"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

は可換である。また、j と r 互いに homotopy equivalence である。(M_f, X) の homotopy 完全列を考えると、$m \leqq n$ に対し、

$$\pi_m(X) \xrightarrow{\text{全}} \pi_m(M_f) \longrightarrow \pi_m(M_f, X) \longrightarrow \pi_{m-1}(X) \xrightarrow{\cong} \pi_m(M_f)$$

という状況にあり、$M_f \simeq Y$ と準同型定理を用いると、$\pi_m(M_f, X) = 0$ であることがわかる。よって、(M_f, X) は n 連結である。では、本題の証明にはいる。まずは、

$$[\alpha], [\beta] \in [K, X]_* \text{に対し、} f_*[\alpha] = f_*[\beta]$$

と仮定する。つまり、$f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ なので、この homotopy を、$H : K \times I \longrightarrow Y$ とすると、これは、

$$j \circ H : (K \times I, K \times \partial I \cup \{*\} \times I) \longrightarrow (M_f, X)$$

と見なすことができる。$\dim K \leqq n-1$ とすると、$K \times I - K \times \partial I \cup \{*\} \times I$ に含まれる任意の胞体の次元は n 以下である。よって、Theorem 0.0.4 により、

$$^{\exists}G : K \times I \longrightarrow X \qquad s.t \qquad j \circ H \simeq G \quad rel\ K \times \partial I \cup \{*\} \times I$$

であり、$\alpha \overset{G}{\simeq} \beta$ なので、$[\alpha] = [\beta]$。これより f_* は $\dim K \leqq n-1$ のとき、単射。そして、$[x] \in [K, Y]_*$ に対し、$j \circ x : (K, *) \longrightarrow (M_f, *)$ を $j \circ x : (K, *) \longrightarrow (M_f, X)$ と見なすと、$\dim K \leqq n$ のとき、Theorem 0.0.4 により、

$$^{\exists}y : K \longrightarrow X \qquad s.t \qquad j \circ x \simeq i \circ y$$

これより、$f_*[y] = [f \circ y] = [r \circ i \circ y] = [r \circ j \circ x] = [x]$ よって、f_* は $\dim K \leqq n$ のとき全射である。

$\square$

Theorem 0.0.9 *Whitehead Theorem*

X, Y: CW 複体とする。$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$f : \text{homotopy equivalence} \Longleftrightarrow \text{weak equivalence}$$

proof) $\Longrightarrow$ は明らか。$\Longleftarrow$ を示していく。任意の CW 複体 K に対し、Prop 0.0.8 により、

$$f_* : [K, X]_* \longrightarrow [K, Y]_*$$

が同型となる。よって、$K = Y$ とおくと、$f_* : [Y, X]_* \longrightarrow [Y, Y]_*$ が同型なので、$[1_Y] \in [Y, Y]_*$ に対し、

$$^\exists[g] \in [Y, X]_* \qquad s.t \qquad f_*([g]) = [f \circ g] = [1_Y]$$

つまり、$f \circ g \simeq 1_Y$。また、$[g \circ f] \in [X, X]_*$ に対し、

$$f_*[g \circ f] = [f \circ g \circ f] = [f] = f_*[1_X]$$

において、$f_* : [X, X]_* \longrightarrow [X, Y]_*$ もやはり同型だから、$[g \circ f] = [1_X]$。これより、$g \circ f \simeq 1_X$。よって、f は homotopy equivalence

$\square$