

切除定理

対空間のホモロジーにおいて最も面倒ではあるが、有用性の高い定理を最後に紹介する。

定義 0.1. 位相空間 X の部分空間 $A, B \subset X$ に対し、

$$X = \text{Int}A \cup \text{Int}B$$

となるとき、 A, B, X を切除 3 対とよび、 $\{X; A, B\}$ と記す。

定理 0.2 (切除定理). $\{X; A, B\}$ を切除 3 対とする。包含写像 $i: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ から誘導される準同型

$$i_*: H_*(A, A \cap B) \rightarrow H_*(X, B)$$

は同型である。

これを証明するためには重心細分の理論を用いる。

1 重心細分

重心とは図形のバランスを取る基点であるが、ここでは図形の変わりに線形単体に対して定義する。

定義 1.1. $\sigma = [a_0, \dots, a_n] \in LS_n(X)$ に対し、

$$b_\sigma = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i \in \mathbf{R}^{n+1}$$

を σ の重心と呼ぶ。

定義 1.2. X を凸集合とし、 $x_0 \in X$ とする。

$$c_n(x_0): LC_n(X) \rightarrow LC_{n+1}(X)$$

を、 $\sigma = [a_0, \dots, a_n] \in LC_n(X)$ に対し、 $c_n(x_0)(\sigma) = [x_0, a_0, \dots, a_n]$ と定義し、 $c_n(x_0)$ を X の x_0 に関する錐写像と呼ぶ。

イメージとしては、底面が $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$ の単体で、 x_0 を頂点とする錐を考えている。

補題 1.3. $n \leq 1$ において、 $\partial_{n+1} \circ c_n(x_0) = 1_{LC_n(X)} - c_{n-1}(x_0) \circ \partial_n$

証明

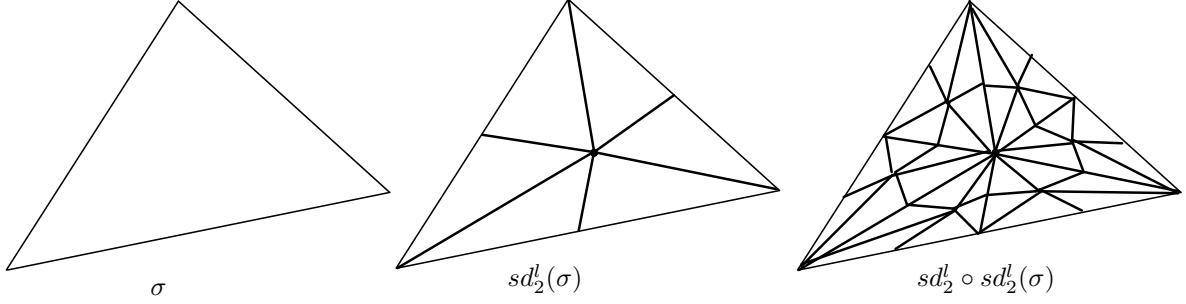
$$\begin{aligned} \partial_{n+1} \circ c_n(x_0)([a_0, \dots, a_n]) &= \partial_{n+1}[x_0, a_0, \dots, a_n] \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j [x_0, a_0, \dots, a_n] \circ d_j \\ &= [a_0, \dots, a_n] + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j [x_0, a_0, \dots, \hat{a}_{j-1}, \dots, a_n] \\ &= [a_0, \dots, a_n] + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} [x_0, a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n] \\ &= [a_0, \dots, a_n] - \sum_{j=0}^n (-1)^j c_{n-1}(x_0)[a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n] \\ &= [a_0, \dots, a_n] - c_{n-1}(x_0) \circ \partial_n [a_0, \dots, a_n] \end{aligned}$$

□

定義 1.4. 準同型 $sd_n^l : LC_n(X) \rightarrow LC_n(X)$ を次で帰納的に定義する。

1. $n = 0$ のとき、 $sd_0^l = 1_{LC_0(X)}$
2. $n \geq 1$ のとき、 $\sigma \in LC_n(X)$ に対し、 $sd_n^l(\sigma) = c_{n-1}(b_\sigma)(sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma))$

これを重心細分準同型と呼ぶ。



命題 1.5. sd^l は、chain map である。

証明 n に関する帰納法で ∂ との可換性を示す。 $n = 0$ のときは、 $\partial_0 = 0$ なので、 $sd_{-1}^l \circ \partial_0 = \partial_0 \circ sd_0^l = 0$ である。今、

$$sd_{n-2}^l \circ \partial_{n-1} = \partial_{n-1} \circ sd_{n-1}^l$$

が成立しているとする。よって、

$$\partial_{n-1} \circ sd_{n-1}^l \circ \partial_n = sd_{n-2}^l \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

なので、 $\sigma \in LC_n(X)$ に対し、

$$\begin{aligned} \partial_n \circ sd_n^l(\sigma) &= \partial_n \circ c_{n-1}(b_\sigma)(sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \\ &= sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) - c_{n-2}(b_\sigma) \circ \partial_{n-1}(sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \\ &= sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) - c_{n-2}(b_\sigma) \circ \partial_{n-1} \circ sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) \\ &= sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) \end{aligned}$$

□

定義 1.6. 準同型 $T_n^l : LS_n(X) \rightarrow LS_{n+1}(X)$ を次のように帰納的に定義する。

1. $n = 0$ のとき、 $[a_0] \in LS_0(X)$ に対し、 $T_0^l[a_0] = [a_0, a_0]$
2. $n \geq 1$ のとき、 $\sigma \in LS_n(X)$ に対し、 $T_n^l(\sigma) = c_n(b_\sigma)(\sigma - T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma))$

命題 1.7. T^l は、 $1_{LC(X)}$ と sd^l をつなぐ chain homotopy である。

証明 n に関する帰納法で、 $\partial_{n+1} \circ T_n^l + T_{n-1}^l \circ \partial_n = 1 - sd_n^l$ を示す。 $n = 0$ のとき、 $[a_0] \in LS_0(X)$ に対し、

$$\partial_1 \circ T_0^l[a_0] + T_{-1}^l \circ \partial_0[a_0] = \partial_1[a_0, a_0] = [a_0] - [a_0] = 0$$

一方、 $1_{LC_0(X)}[a_0] - sd_0^l[a_0] = [a_0] - [a_0] = 0$ であるため、 $n = 0$ のときは成立する。

次に、 $\partial_n \circ T_{n-1}^l + T_{n-2}^l \circ \partial_{n-1} = 1 - sd_{n-1}^l$ が成立するとする。 $\sigma \in LC_n(X)$ に対し、

$$\begin{aligned}
& \partial_{n+1} \circ T_n^l(\sigma) + T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) \\
&= \partial_{n+1}(c_n(b_\sigma)(\sigma - T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) + T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \\
&= (\sigma - T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) - c_{n-1}(b_\sigma) \circ \partial_n(\sigma - T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) + T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) \\
&= \sigma - c_{n-1}(b_\sigma) \circ \partial_n(\sigma - T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \\
&= \sigma - c_{n-1}(b_\sigma) \circ \partial_n(\sigma) + c_{n-1}(b_\sigma) \circ \partial_n \circ T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) \\
&= \sigma - c_{n-1}(b_\sigma) \circ \partial_n(\sigma) + c_{n-1}(b_\sigma) (\partial_n \circ T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \quad \text{帰納法の仮定より、} \\
&= \sigma - c_{n-1}(b_\sigma) \circ \partial_n(\sigma) + c_{n-1}(b_\sigma) (\partial_n(\sigma) - sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) - T_{n-2}^l \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)) \\
&= \sigma - c_{n-1}(b_\sigma) \circ \partial_n(\sigma) + c_{n-1}(b_\sigma) (\partial_n(\sigma) - sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \\
&= \sigma - c_{n-1}(b_\sigma) \circ sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) \\
&= \sigma - sd_n^l(\sigma)
\end{aligned}$$

□

命題 1.8. $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ を凸集合とし、 $x_0 \in X$ をとる。 $f : X \rightarrow Y$ をアフィン写像としたとき、次のことが成り立つ。

1. $f_\# \circ c_n(x_0) = c_n(f(x_0)) \circ f_\#$
2. $f_\# \circ sd_n^l = sd_n^l \circ f_\#$
3. $f_\# \circ T_n^l = T_n^l \circ f_\#$

証明 (1) について。 $[a_0, \dots, a_n] \in LS_n(X)$ に対し、

$$\begin{aligned}
f_\# c_n(x_0)[a_0, \dots, a_n] &= f_\#[x_0, a_0, \dots, a_n] \\
&= [f(x_0), f(a_0), \dots, f(a_n)] \\
&= c_n(f(x_0))[f(a_0), \dots, f(a_n)] \\
&= c_n(f(x_0)) \circ f_\#[a_0, \dots, a_n]
\end{aligned}$$

(2) について。帰納法を用いて示す。 $n = 0$ の時、 $sd_0^l = 1_{LS_0(X)}$ より成立。

$$f_\# \circ sd_{n-1}^l = sd_{n-1}^l \circ f_\#$$

が成立するとする。このとき、 $\sigma \in LC_n(X)$ に対し、

$$\begin{aligned}
f_\# \circ sd_n^l(\sigma) &= f_\#(C_{n-1}^{b_\sigma} \circ sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \\
&= (f_\# \circ c_{n-1}(b_\sigma)) \circ sd_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma) \quad (1) \text{ より、} \\
&= c_{n-1}(f(b_\sigma)) \circ (f_\# \circ sd_{n-1}^l) \circ \partial_n(\sigma) \quad \text{仮定より、} \\
&= c_{n-1}(f(b_\sigma)) \circ (sd_{n-1}^l \circ f_\#) \circ \partial_n(\sigma) \quad \text{chain map より、} \\
&= c_{n-1}(f(b_\sigma)) \circ sd_{n-1}^l \circ (\partial_n \circ f_\#)(\sigma) \\
&= sd_n^l \circ f_\#(\sigma)
\end{aligned}$$

(3) について。同じく帰納法で示す。 $n = 0$ のとき、 $[a_0] \in LS_0(X)$ に対し、

$$f_\# \circ T_0^l[a_0] = f_\#[a_0, a_0] = [f(a_0), f(a_0)] = T_0^l[f(a_0)] = T_0^l \circ f_\#[a_0]$$

なので成立。今、

$$f_\# \circ T_{n-1}^l = T_{n-1}^l \circ f_\#$$

が成立するとする。このとき、 $\sigma \in LC_n(X)$ に対し、

$$\begin{aligned}
f_{\#} \circ T_n^l(\sigma) &= f_{\#} \circ C_n(b_{\sigma})(\sigma - T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \quad (1) \text{ より、} \\
&= c_n(f(b_{\sigma})) \circ f_{\#}(\sigma - T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \\
&= c_n(f(b_{\sigma}))(f_{\#}(\sigma) - f_{\#} \circ T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \quad \text{仮定より、} \\
&= c_n(f(b_{\sigma}))(f_{\#}(\sigma) - T_{n-1}^l \circ f_{\#} \circ T_{n-1}^l \circ \partial_n(\sigma)) \quad \text{chain map より、} \\
&= c_n(f(b_{\sigma}))(f_{\#}(\sigma) - T_{n-1}^l \circ \partial_n \circ f_{\#}(\sigma)) \quad f \text{ はアフィン写像より重心を保つため、} \\
&= c_n(b_{(f \circ \sigma)})(f \circ \sigma - T_{n-1}^l \circ \partial_n \circ (f \circ \sigma)) \\
&= T_n^l \circ (f \circ \sigma) = T_n^l \circ f_{\#}(\sigma)
\end{aligned}$$

□

以上で行った線形単体の議論を一般の特異単体に拡張する。方法は単純で、 $\Delta^n \rightarrow X$ に対し定義域の Δ^n を線形単体と考えて、あらかじめ細分しておけばよいのである。

定義 1.9. X を位相空間としたとき、

$$sd_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$$

を、 $\sigma \in S_n(X)$ に対し、 $sd_n(\sigma) = \sigma_{\#}(sd_n^l(1_{\Delta^n}))$ で定義する。このとき、 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ なので、 $\sigma_{\#} : S_n(\Delta^n) \rightarrow S_n(X)$ 、 $LS_n(\Delta^n) \subset S_n(\Delta^n)$ 、そして、 $1_{\Delta^n} \in LS_n(\Delta^n)$ であることに注意する。これも重心細分準同型と呼ぶことにする。また、

$$T_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$$

が、 $T_n(\sigma) = \sigma_{\#}(T_n^l(1_{\Delta^n}))$ により定義する。

次の命題はすべて線形単体で行った議論を用いれば容易に示せるので、証明は省略する。

命題 1.10. $sd : C(X) \rightarrow C(X)$ は chain map であり、 T は $1_{C(X)}$ と sd をつなぐ chain homotopy である。

命題 1.11. 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ に対し、 sd, T はいずれも $f_{\#}$ と可換である。つまり、 $f_{\#} \circ sd = sd \circ f_{\#}$ 、 $f_{\#} \circ T = T \circ f_{\#}$ が成り立つ。

さて、結局のところ重心細分をとっても、もともとの図形ホモトピー型は変えないというのが重要な点である。もちろんのこと、重心細分を 2 回、3 回、 \dots 、 m 回と取ったところでそれは変わらない。つまり、 $1 \simeq sd^m$ であることはよいのだが、これをつなぐホモトピーを後で使うため具体的に求めておく。

$$D_n^m : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$$

を、 $D_n^m = \sum_{j=0}^{m-1} T_n \circ sd_n^j$ で定義する。($m = 1$ のとき T_n と一致する)

命題 1.12. D^m は $1_{C(X)}$ と sd^m をつなぐ chain homotopy である。

証明

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1} \circ D_n^m(\sigma) &= \partial_{n+1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} T_n \circ sd_n^j(\sigma) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (\partial_{n+1} \circ T_n)(sd_n^j(\sigma)) \quad \text{命題 1.7 より、} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (sd_n^j(\sigma) - sd_n(sd_n^j(\sigma)) - T_{n-1} \circ \partial_n(sd_n^j(\sigma))) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (sd_n^j(\sigma) - sd_n^{j+1}(\sigma) - T_{n-1} \circ sd_{n-1}^j \circ \partial_n(\sigma)) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (sd_n^j(\sigma) - sd_n^{j+1}(\sigma)) - \sum_{j=0}^{m-1} (T_{n-1} \circ sd_{n-1}^j)(\partial_n(\sigma)) \\
&= \sigma - sd_n^m(\sigma) - D_{n-1}^m(\partial_n(\sigma))
\end{aligned}$$

よって、 $\partial_{n+1} \circ D_n^m + D_{n-1}^m \circ \partial_n = 1 - sd_n^m$ である。 \square

さて、絵で見てもわかるように重心細分を何回も繰り返していくと、分割された単体はどんどんと小さくなっていく。これを正確に述べるためには、まず空間の直径というものを定義する。

定義 1.13. X をコンパクトな距離空間とし、その距離関数を $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 $X \times X$ もコンパクトなので、 $d(X \times X) \subset \mathbb{R}$ もコンパクト、つまり有界閉集合である。よって、 $d(X \times X)$ は最大値を持つ。これを $d(X)$ と書いて X の直径と呼ぶ。

特異単体や特異 chain に対しても直径という概念が定義できる。

定義 1.14. X を距離空間としたとき、 $\sigma \in S_n(X)$ とすると、 Δ^n はコンパクトなので $\sigma(\Delta^n)$ もコンパクト。

$$d(\sigma) = d(\sigma(\Delta^n))$$

により定義する。また、 $c = \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i \in C_n(X)$ に対し、

$$d(c) = \max\{d(\sigma_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$$

と定義する。

補題 1.15. X を凸集合、 $\sigma = [a_0, \dots, a_n] \in LS_n(X)$ としたとき、

$$d(\sigma) = \max\{d(a_i, a_j) \mid 0 \leq i < j \leq n\}$$

である。

証明 $d(a_i, a_j) \leq d(\sigma)$ は明らかであるので、逆の不等号を示す。

$x, y \in \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \sigma(\Delta^n)$ に対し、 $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$ と表記できる。ただし、 $\sum t_i = 1$ である。三角不等式を用いると、

$$d(x, y) = d\left(\sum t_i a_i, \sum t_i y\right) \leq \sum t_i d(a_i, y) \leq \sum t_i \max\{d(a_i, y) \mid 0 \leq i \leq n\} = \max\{d(a_i, y) \mid 0 \leq i \leq n\}$$

また、任意の i について、今の議論を繰り返すと、

$$d(a_i, y) = d(y, a_i) \leq \max\{d(a_j, a_i) \mid 0 \leq j \leq n\}$$

であるため、

$$d(\sigma) \leq \max\{d(a_i, a_j) \mid 0 \leq i < j \leq n\}$$

がいえる。 \square

補題 1.16. $n \geq 2$ で、 $\sigma = [a_0, \dots, a_n] \in LS_n(X)$ に対し、 $d(\sigma) = d(\partial_n(\sigma))$ である。

証明 $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j [a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n]$ なので、

$$d(\partial_n(\sigma)) = \max\{d([a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n]) \mid 0 \leq j \leq n\}$$

$0 \leq \forall j \leq n$ に対し、 $d([a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n]) \leq d([a_0, \dots, a_n])$ であるため、 $d(\partial_n(\sigma)) \leq d(\sigma)$ となる。逆に、 $d(\sigma) = \max\{d(a_i, a_j) \mid 0 \leq i < j \leq n\} = d(a_{i_0}, a_{j_0})$ とおくと、 $k \neq i_0, k \neq j_0$ である k に対し、

$$d([a_0, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_n]) = d([a_0, \dots, a_n]) = d(a_{i_0}, a_{j_0})$$

なので、 $d(\sigma) \leq d(\partial_n(\sigma))$ である。 □

補題 1.17. $\sigma \in LS_n(X)$ に対し、 $d(sd_n(\sigma)) = \frac{n}{n+1}d(\sigma)$ である。

証明 次元による帰納法を用いる。 $n = 0$ のとき、 $sd_0 = 1_{LC_0(X)}$ 、 $d(\sigma) = 0$ より成立。

$n = 1$ のとき、 $\sigma = [a_0, a_1]$ に対し、 $d(\sigma) = d(a_0, a_1)$ である。また、

$$sd_1(\sigma) = [b_\sigma, a_1] - [b_\sigma, a_0]$$

である。ただし、 $b_\sigma = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)$ 。これより、

$$d(sd_1(\sigma)) = \max\{d(b_\sigma, a_1), d(b_\sigma, a_0)\} = \frac{1}{2}d(a_0, a_1) = \frac{1}{2}d(\sigma)$$

となる。

$n \geq 2$ のとき、 $\tau \in LS_{n-1}(X)$ に対し、 $d(sd_{n-1}(\tau)) = \frac{n-1}{n}d(\tau)$ が成立すると仮定する。このとき、 $\sigma \in LS_n(X)$ に対し、補題 1.16 により、まずは、

$$d(sd_{n-1}(\partial_n(\sigma))) = \frac{n-1}{n}d(\partial_n(\sigma)) = \frac{n-1}{n}d(\sigma) < \frac{n}{n+1}d(\sigma)$$

であることが従う。

$$sd_n(\sigma) = c_{n-1}(b_\sigma) \circ sd_{n-1} \circ \partial(\sigma)$$

だったので、 $sd_{n-1} \circ \partial(\sigma) = \sum a_i \tau_i$ と書いたとき、各 i について、 $d(c_{n-1}(b_\sigma)(\tau_i))$ を求めればよい。これはさらに、 $d([b_\sigma, b_0, \dots, b_{n-1}])$ という形に置き換えられる。これは、補題 1.15 により、

$$d([b_\sigma, b_0, \dots, b_{n-1}]) = \max\{d(b_\sigma, b_j), d(b_k, b_l) \mid 0 \leq j \leq n-1, 0 \leq k < l \leq n-1\}$$

このとき、 $d(b_k, b_l) \leq \frac{n}{n+1}d(\sigma)$ であることは上で示した。残りの部分について、任意の $x \in \sigma(\Delta^n)$ に対し、 $d(b_\sigma, x)$ を計算すればよいが、これは補題 1.15 の証明の中で、 $d(b_\sigma, x) \leq \max_i d(b_\sigma, a_i)$ を示したので、 $d(b_\sigma, x) \leq d(b_\sigma, a_k)$ となる k が存在する。

$$d(b_\sigma, a_k) = d\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j, a_k\right) = \frac{1}{n+1} d\left(\sum_{j=0}^n a_j, (n+1)a_k\right) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n d(a_j, a_k)$$

ここで、 $d(a_k, a_k) = 0$ なので、

$$d(b_\sigma, x) \leq d(b_\sigma, a_k) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0, j \neq k}^n d(a_j, a_k) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0, j \neq k}^n d(\sigma) = \frac{n}{n+1}d(\sigma)$$

これより、 $d(sd_n(\sigma)) = \frac{n}{n+1}d(\sigma)$ が示せた。 □

これより、単体の直径は重心細分一回するごとに、 $\frac{n}{n+1}$ 倍以下に縮んでいく。三角形でみるとわかりやすい。

2 切除同型

では、実際に切除定理を証明することを考える。和集合の空間のホモロジー群に関する定理である。つまり、 $C(A \cup B)$ という chain complex が $C(A)$ と $C(B)$ でどのように表せるかがポイントである。共通部分の場合には、 $\sigma \in S_n(A) \cap S_n(B) \subset S_n(X)$ とすると、 $\sigma : \Delta^n \rightarrow A \cap B$ を意味しているので、 $S_n(A) \cap S_n(B) \cong S(A \cap B)$ であり、これより、 $C(A) \cap C(B) \cong C(A \cap B)$ であることがわかる。

注意 2.1. X を位相空間とし、 $A, B \subset X$ をその部分空間とする。このとき、包含写像から誘導される

$$i : C(A) + C(B) \rightarrow C(A \cup B)$$

もまた単射である。しかし、一般に全射ではない。たとえば、 $[0, 3], [1, 4] \subset [0, 4]$ という空間に対し、 $\sigma : \Delta^1 \rightarrow [0, 4]$ を4倍に引き伸ばすアフィン同型とすると、 $\sigma \in S_1([0, 4])$ であるが、 $\sigma \notin S_1([0, 3])$ であり、 $\sigma \notin S_1([1, 4])$ である。よって、 $\sigma \notin C_1([0, 3]) + C_1([1, 4])$ である。

よって、 $i : C_n(A) + C_n(B) \rightarrow C_n(A \cup B)$ は同型ではないものの、chain homotopy 同値ぐらいになっていないかというのが基本的な考え方である。上の例で、 σ を重心細分すると、 $[0, 2]$ と $[2, 4]$ への写像に分かれる。これならば、 $C_1([0, 3]) + C_1([1, 4])$ の元で表示できるわけである。このように重心細分を何回も駆使すれば、値域をどんどん小さくすることができ、元の空間の被覆の特異単体で表すことができる。

さて、本題の証明には次のルベークの補題を用いる。

補題 2.2 (ルベークの補題). コンパクト距離空間 X とその開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、次の性質を満たす $\delta > 0$ (ルベーク数) が存在する。任意の $x \in X$ に対し、 $U_\delta(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\} \subset U_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。

命題 2.3. $\{X; A, B\}$ が切除3対ならば、包含写像から誘導される準同型 $i_* : H_*(C(A) + C(B)) \rightarrow H_*(X)$ は同型である。

証明 $\sigma \in S_n(X)$ をとると、 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ であるため、

$$\Delta^n = \sigma^{-1}(X) = \sigma^{-1}(\text{Int}(A)) \cup \sigma^{-1}(\text{Int}(B))$$

これは、 Δ^n の開被覆を与え、ルベークの補題が適用できて、ルベーク数 $\delta > 0$ が存在する。また、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(sd_n^m(1_{\Delta^n})) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^m d(1_{\Delta^n}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^m \sqrt{2} = 0$$

これより、十分大きな番号 $M \geq 0$ に対し、 $d(sd_n^M(1_{\Delta^n})) < \delta$ となる。 $(sd_n^M(1_{\Delta^n})) = \sum_{i=1}^k a_i \tau_i$ とかくと、任意の i について、 $d(\tau_i) \leq \delta$ であるため、 $\tau_i(\Delta^n) \subset \sigma^{-1}(\text{Int}(A))$ または、 $\tau_i(\Delta^n) \subset \sigma^{-1}(\text{Int}(B))$ が決定する。よって、 $1 \leq i \leq k$ に対し、 $\sigma \circ \tau_i \in S_n(A)$ または、 $\sigma \circ \tau_i \in S_n(B)$ が決定する。よって、

$$sd_n^M(\sigma) = \sigma_\#(sd_n^M(1_{\Delta^n})) = \sigma_\# \left(\sum_{i=1}^k a_i \tau_i \right) = \sum_{i=1}^k a_i (\sigma \circ \tau_i) \in C_n(A) + C_n(B)$$

このように、 $sd_n^M(\sigma) \in C_n(A) + C_n(B)$ となる最小の M を $m(\sigma)$ とおく。

これで、 $i : C(A) + C(B) \rightarrow C(X)$ の逆対応、 $C(X) \rightarrow C(A) + C(B)$ が $\sigma \mapsto sd_n^{m(\sigma)}(\sigma)$ で定義できたように思えるが、残念ながら chain homotopy inverse として構成するためにはまだ遠い。

ところで、 $\partial_n \circ sd_n^{m(\sigma)} \in C_{n-1}(A) + C_{n-1}(B)$ を考えると、

$$\partial_n \circ sd_n^{m(\sigma)}(\sigma) = sd_{n-1}^{m(\sigma)} \circ \partial_n(\sigma) = sd_{n-1}^{m(\sigma)} \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma \circ d_j \right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j sd_{n-1}^{m(\sigma)}(\sigma \circ d_j)$$

なので、 $m(\sigma \circ s_j) \leq m(\sigma)$ であることがわかる。

次に、 $D_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ を以前定義した D_n^m を用いて、 $D_n(\sigma) = D_n^{m(\sigma)}(\sigma)$ と定義する。逆に言うとこれを chain homotopy とするよ様に、chain homotopy inverse を構成する。よって、 $\partial_{n+1} \circ D_n(\sigma) + D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)$ を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} \circ D_n(\sigma) + D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= \partial_{n+1} \circ D_n^{m(\sigma)}(\sigma) + D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) \quad \text{命題??より、} \\ &= \sigma - sd_n^{m(\sigma)}(\sigma) - D_{n-1}^{m(\sigma)} \circ \partial_n(\sigma) + D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) \\ &= \sigma - \left(sd_n^{m(\sigma)}(\sigma) + D_{n-1}^{m(\sigma)} \circ \partial_n(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) \right) \end{aligned}$$

後ろの2項に着目して計算すると、まず、 $m(\sigma) = 0$ のとき、 $m(\sigma \circ s_j) = 0$ なので、

$$D_{n-1}^{m(\sigma)} \circ \partial_n(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = D_{n-1}^0 \circ \partial_n(\sigma) - D_{n-1}^0 \circ \partial_n(\sigma) = 0$$

となる。次に $m(\sigma) \geq 1$ のとき、

$$D_{n-1}^{m(\sigma)} \circ \partial_n(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=m(\sigma \circ d_j)}^{m(\sigma)-1} T_{n-1} \circ sd_{n-1}^i(\sigma \circ d_j)$$

これより、

$$\partial_{n+1} \circ D_n(\sigma) + D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sigma - \left(\sum_{j=0}^n \sum_{i=m(\sigma \circ d_j)}^{m(\sigma)-1} (-1)^j T_{n-1} \circ sd_{n-1}^i(\sigma \circ d_j) \right)$$

ここで、 $m(\sigma \circ d_j) \leq \forall i \leq m(\sigma) - 1$ に対し、 $m(\sigma \circ d_j)$ の定義より、 $sd_{n-1}^i(\sigma \circ d_j) \in C_{n-1}(A) + C_{n-1}(B)$ である。よって、 $T_{n-1} \circ sd_{n-1}^i(\sigma \circ d_j) \in C_n(A) + C_n(B)$ となる。これより、

$$e_n : C_n(X) \rightarrow C_n(A) + C_n(B)$$

を、 $e_n(\sigma) = sd_n^{m(\sigma)}(\sigma) + D_{n-1}^{m(\sigma)}(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)$ と定義する。(1) の式から、

$$e_n(\sigma) = \sigma - \partial_{n+1} \circ D_n(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)$$

である。(はじめからこう定義したかったのだが、値域に収まるということを使うために上のような方法で定義した)

$$\begin{aligned} e_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) &= e_{n-1}(\partial_n(\sigma)) \\ &= \partial_n(\sigma) - \partial_n \circ D_{n-1}(\partial_n(\sigma)) - D_{n-2} \circ \partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) \\ &= \partial_n(\sigma) - \partial_n \circ D_{n-1}(\partial_n(\sigma)) \\ &= \partial_n(\sigma) - \partial_n \circ \partial_{n+1} \circ D_n(\sigma) - \partial_n \circ D_{n-1}(\partial_n(\sigma)) \\ &= \partial_n(\sigma - \partial_{n+1} \circ D_n(\sigma) - D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma)) \\ &= \partial_n \circ e_n(\sigma) \end{aligned}$$

これより、 $e : C(X) \rightarrow C(A) + C(B)$ は chain map である。

$\sigma \in C_n(A) + C_n(B)$ において、 $m(\sigma) = 0$ なので、 $e_n \circ i_n(\sigma) = e_n(\sigma) = \sigma$ より、 $e \circ i = 1_{C(A)+C(B)}$ である。逆に、

$$\partial_{n+1} \circ D_n(\sigma) + D_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) = \sigma - i_n \circ e_n(\sigma)$$

だったので、 D が $1_{C(X)}$ と $i \circ e$ をつなぐ chain homotopy となっている。よって、 $i_* : H_n(C(A)+C(B)) \rightarrow H_n(X)$ は同型である。□

次はホモロジー群の同型を証明する際にはよく登場する5項補題と呼ばれるものである。

補題 2.4. 次の群と準同型の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow & & \varphi_4 \downarrow & & \varphi_5 \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5 \end{array}$$

このとき、上下横列は完全とし、 $i = 1, 2, 4, 5$ に対し φ_i が同型ならば、 φ_3 も同型である。

証明 この手の証明は「図式の追いかけ」と呼ばれていて実際に元を取って動かしてみるとよくわかる。まず φ_3 が全射であることを示す。 $a \in B_3$ とると、 $g_3(a) \in B_4$ なので、 φ_4 の全射性から、 $\varphi_4(b) = g_3(a)$ となる $b \in A_4$ が存在する。 下列の完全性より、

$$\varphi_5 \circ f_4(b) = g_4 \circ \varphi_4(b) = g_4 \circ g_3(a) = 0$$

φ_5 の単射性より、 $f_4(b) = 0$ である。 上列の完全性から、 $f_3(c) = b$ となる $c \in A_3$ が存在する。 ここで、 $a - \varphi_3(c) \in B_3$ に対し、

$$g_3(a - \varphi_3(c)) = g_3(a) - g_3 \circ \varphi_3(c) = g_3(a) - \varphi_4 \circ f_3(c) = g_3(a) - \varphi_4(b) = g_3(a) - g_3(a) = 0$$

下列の完全性から、 $g_2(d) = a - \varphi_3(c)$ となる $d \in B_2$ が存在する。 また、 φ_2 の全射性から、 $\varphi_2(e) = d$ となる $e \in A_2$ が存在する。 さてこのとき、 $c + f_2(e) \in A_3$ に対し、

$$\varphi_3(c + f_2(e)) = \varphi_3(c) + \varphi_3 \circ f_2(e) = \varphi_3(c) + g_2 \circ \varphi_2(e) = \varphi_3(c) + g_2(d) = \varphi_3(c) + a - \varphi_3(a) = a$$

次に φ_3 が単射であることを示す。 $a \in A_3$ に対し、 $\varphi_3(a) = 0$ と仮定する。

$$\varphi_4 \circ f_3(a) = g_3 \circ \varphi_3(a) = 0$$

であり、 φ_4 が単射なので、 $f_3(a) = 0$ である。 上列の完全性から、 $f_2(b) = a$ となる $b \in A_2$ が存在する。

$$g_2 \circ \varphi_2(b) = \varphi_3 \circ f_2(b) = \varphi_3(a) = 0$$

下列の完全性から、 $g_1(c) = \varphi_2(b)$ となる $c \in B_1$ が存在する。 φ_1 が全射より、 $\varphi_1(d) = c$ となる $d \in A_1$ が存在する。

$$\varphi_2(f_1(d) - b) = \varphi_2 \circ f_1(d) - \varphi_2(b) = g_1 \circ \varphi_1(d) - \varphi_2(c) = g_1(c) - g_1(c) = 0$$

φ_2 は単射より、 $f_1(d) = b$ であり、 $a = f_2(b) = f_2 \circ f_1(d) = 0$ となる。 □

補題 2.5. G をアーベル群とし、 $A, B \subset G$ を部分群としたとき、 包含写像 $i_A : A \rightarrow A + B$ から誘導される準同型、 $A/A \cap B \rightarrow (A + B)/B$ は同型である。

証明 i_A に射影を合成した写像、 $j : A \rightarrow A + B \rightarrow (A + B)/B$ を考えると、 $[a + b] \in (A + B)/B$ に対し、 $j(a) = [a] = [a + b] \in (A + B)/B$ なので、 j は全射である。 よって準同型定理により、

$$A/\text{Ker}j = A/A \cap B \cong (A + B)/B$$

が導かれる。 □

これを用いて、 切除定理を示す。 もう一度定理も含めて書いておく。

定理 2.6 (切除定理). $\{X; A, B\}$ が切除 3 対のとき、 包含写像 $i : (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ から誘導される準同型

$$i_* : H_*(A, A \cap B) \rightarrow H_*(X, B)$$

は同型である。

証明 包含写像 $i : (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ から誘導される写像 $i_{\#} : C(A, A \cap B) \rightarrow C(X, B)$ を考える。 $C(A) \subset C(A) + C(B) \subset C(X)$ なので、 $e_1 : C(A) \rightarrow C(A) + C(B)$ と、 $e_2 : C(A) + C(B) \rightarrow C(X)$ を包含写像とする。 また、 $C(A \cap B) \subset C(B)$ でもあるので、 $\tilde{e}_1 : C(A, A \cup B) \rightarrow (C(A) + C(B))/C(B)$ と、 $\tilde{e}_2 : (C(A) + C(B))/C(B) \rightarrow C(X, B)$ が誘導される。 i, e_1, e_2 はすべて包含写像なので、 $i_{\#} = \tilde{e}_1 \circ \tilde{e}_2$ である。 このとき、 補題 2.5 により、 \tilde{e}_1 は同型である。 また、 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(B) & \longrightarrow & H_n(C(A) + C(B)) & \longrightarrow & H_n((C(A) + C(B))/C(B)) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) \longrightarrow H_{n-1}(C(A) + C(B)) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \tilde{e}_{2*} & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_n(B) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}$$

ここで、上下横列はホモロジー群の長い完全列、縦列はすべて包含写像（恒等写像）であるので可換である。このとき、恒等写像からの誘導、そして命題 2.3 により、中央以外は同型である。よって 5 項補題により、中央の \tilde{e}_{2*} が同型となる。これより、 $i_* = \tilde{e}_{1*} \circ \tilde{e}_{2*}$ は同型である。 \square

系 2.7. X を位相空間とし、 $U \subset A \subset X$ を部分空間で、 $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$ を満たすならば、包含写像から誘導される準同型

$$i_* : H_*(X - U, A - U) \longrightarrow H_*(X, A)$$

は同型である。

証明 $B = X - U$ とおく。

$$A \cap B = A \cap (X - U) = (X \cap A) - (U \cap A) = A - U$$

また、

$$\text{Int}(B) \cup \text{Int}(A) = \text{Int}(X - U) \cup \text{Int}(A) = (X - \bar{U}) \cup \text{Int}(A) = X$$

であるため、切除定理より、 $i_* : H_*(B, A \cap B) \longrightarrow H_*(X, A)$ は同型。よって、 $i_* : H_*(X - U, A - U) \longrightarrow H_*(X, A)$ が同型。 \square