ホモロジー群の基本定理

その他、ホモロジー群にまつわる基本的な定理などを紹介する。

1 弧状連結性

弧状連結な空間 X は、つまりホモトピー群の言葉で述べるならば、$\pi_0(X) = *$ であるが、ホモロジー群においても特徴付けられる。

定義 1.1. 位相空間 X が弧状連結とは、任意の $x, y \in X$ に対し、$\gamma(0) = x,\, \gamma(1) = y$ を満たす $\gamma : I \longrightarrow X$ が存在することである。

定理 1.2. X を弧状連結な空間とすると、$\varepsilon : H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を、$\varepsilon(\sum a_i\sigma_i) \mapsto \sum a_i$ で定義すると、これは同型である。

証明 $H_0(X) = \mathrm{Ker}\partial_0/\mathrm{Im}\partial_1$ であった。ここで、$\partial_0 = 0$ なので、$\mathrm{Ker}\partial_0 = S_0(X)$ である。$x_0 \in X$ を固定し、$p_{x_0} : \Delta^0 \longrightarrow X$ を、$p_{x_0}(e_0) = x_0$ とする。$\sum_{i=0}^{k} a_i\sigma_i \in S_0(X)$ に対し、X が弧状連結より、$f_i : \Delta^1 = I \longrightarrow X$ が存在し、$f_i(e_0) = x_0,\, f_i(e_1) = \sigma_i(e_0)$ が各 $0 \leqq i \leqq k$ に対して成り立つ。

$$\partial_1(f_i) = f_i \circ d_0 - f_i \circ d_1 = \sigma_i - p_{x_0} \in \mathrm{Im}\partial_1$$

これより、任意の $0 \leqq i \leqq k$ に対し、$[p_{x_0}] = [\sigma_i] \quad \in H_0(X)$ である。これより、$\sum_{i=0}^{k} a_i[\sigma_i] = \sum_{i=0}^{k} a_i[p_{x_0}]$ なので、$H_0(X) = \{\sum a_i[p_{x_0}]\}$ と表せるため、係数を対応させる $\varepsilon : H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ は同型である。 □

系 1.3. X, Y をともに弧状連結な空間とする。$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とすると、$f_* : H_0(X) \longrightarrow H_0(Y)$ は同型である。

証明 f_* は係数には作用しないため、係数を対応させる ε と可換である。つまり、

$$\varepsilon_Y \circ f_* = \varepsilon_X : H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

であるため、f_* も同型である。 □

2 Mayer-Vietoris 完全列

次も有名な Mayer-Vietoris の完全列である。

定理 2.1. $(X; A, B)$ を切除 3 対としたとき、次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{k_* - l_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

ただし、i, j, k, j はすべて包含写像であり、∂ は切除同型を用いて、

$$\partial : H_n(X) \xrightarrow{\beta_*} H_n(X, B) \cong H_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial_{A, A\cap B}} H_{n-1}(A \cap B)$$

により定義される。

証明 次の完全列を含んだ可換図式を考えるとわかりやすい。

$$\begin{tikzcd}
H_n(A \cap B) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j_*"] & H_n(A) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "k_*"] & H_n(A, A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"', "\cong"] & H_{n-1}(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(A) \arrow[d] \\
H_n(B) \arrow[r, "l_*"] & H_n(X) \arrow[r, "\beta_*"] & H_n(X, B) \arrow[r] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & H_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

1. $H_n(A) \oplus H_n(B)$ における完全性。$(k_* - l_*) \circ (i_*, j_*) = 0$ であるのは、上の図式の一番左の図式が可換だからである。逆に、$(k_* - l_*)(a, b) = 0$ とすると、$k_*(a) = l_*(b) \in H_n(X)$ である。このとき、下列の完全性から
$$\alpha_*(a) = \varphi^{-1} \circ \beta_* \circ k_*(a) = \varphi_*^{-1} \circ \beta_* \circ l_*(b) = 0$$
である。よって、$i_*(c) = a$ となる $c \in H_n(A \cap B)$ が存在する。ここで、$b - j_*(c) \in H_n(B)$ に対し、
$$l_*(b - j_*(c)) = l_*(b) - l_* \circ j_*(c) = l_*(b) - k_* \circ i_*(c) = l_*(b) - k_*(a) = 0$$
よって、$d \in H_{n+1}(X, B)$ が存在し、$\partial_{X,B}(d) = b - j_*(c)$ を満たす。このとき、$c + \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1}(d) \in H_n(A \cap B)$ を考えると、
$$i_*(c + \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1}(d)) = i_*(c) = a$$
であり、
$$j_*(c + \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1}(d)) = j_*(c) + \partial_{X,B}(d) = b$$
となるため、$(i_*, j_*)(c + \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1}(d)) = (a, b)$ である。

2. $H_n(X)$ における完全性。まず図式を追うと、$\partial \circ k_* = \partial \circ l_* = 0$ より、$\partial \circ (k_* - l_*) = 0$ であることがわかる。次に、$\partial(x) = 0$ とすると、$\partial_{A,A\cap B} \circ \beta_*(x) = 0$ なので、$\alpha_*(y) = varphi_*^{-1} \circ \beta_*(x)$ となる $y \in H_n(A)$ が存在する。ここで、$k_*(y) - x \in H_n(X)$ に対し、
$$\beta_*(k_*(y) - x) = \beta_* \circ k_*(y) - \beta_*(x) = \varphi_* \circ \alpha_*(y) - \beta_*(x) = \beta_*(x) - \beta_*(x) = 0$$
よって、$z \in H_n(B)$ が存在し、$l_*(z) = k_*(y) - x$ を満たす。これより、$(k_* - l_*)(y, z) = k_*(y) - l_*(z) = x$ となる。

3. $H_{n-1}(A \cap B)$ における完全性。やはり、図式を追いかけると、$i_* \circ \partial = j_* \circ \partial = 0$ となることが完全性よりわかる。よって、$(i_*, j_*) \circ \partial = 0$ である。逆に、$(i_*, j_*)(x) = 0$ とすると、$i_*(x) = 0$ かつ、$j_*(x) = 0$ である。これより、$a \in H_n(A, A \cap B)$ が存在し、$\partial_{A,A\cap B}(a) = x$ を満たす。そして、$b \in H_n(B, A \cap B)$ が存在し、$\partial_{B,A\cap B}(b) = x$ を満たす。次の可換図式を考える。
$$\begin{tikzcd}
 & H_n(A, A \cap B) \oplus H_n(B, A \cap B) \arrow[r, "\partial_{A,A\cap B} \oplus \partial_{B,A\cap B}"] \arrow[d, "(\varphi_A)_* + (\varphi_B)_*"] & H_{n-1}(A \cap B) \oplus H_{n-1}(A \cap B) \arrow[d, "+"] \\
H_n(X) \arrow[r, "\gamma_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & H_n(X, A \cap B) \arrow[r, "\partial_{X,A\cap B}"] \arrow[d, "\delta_*"] & H_{n-1}(A \cap B) \\
 & H_n(X, B) &
\end{tikzcd}$$
ただし、γ, δ は包含写像である。$(a, -b) \in H_n(A, A \cap B) \oplus H_n(B, A \cap B)$ において、$\partial_{A,A\cap B}(a) - \partial_{B,A\cap B}(b) = x - x = 0$ だから、
$$\delta_* \circ (\varphi_A)_* + (\varphi_B)_*(a, -b) = 0$$
なので、$d \in H_n(X)$ が存在し、$\gamma_*(d) = (\varphi_A)_* + (\varphi_B)_*(a, -b)$ となる。よって、
$$\begin{aligned}
\partial(d) =& \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1} \circ \beta_*(d) \\
&= \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1} \circ \delta_* \circ \gamma_*(d) \\
&= \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1} \circ \delta_*((\varphi_A)_*(a) - (\varphi_B)_*(b)) \\
&= \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1} \circ \delta_*((\varphi_A)_*(a)) \\
&= \partial_{A,A\cap B} \circ \varphi_*^{-1} \circ \varphi_*(a) \\
&= \partial_{A,A\cap B}(a) \\
&= x
\end{aligned}$$
となる。

□

3　球面のホモロジー群

　ここでは可縮な空間の次に考えるべき空間、球面のホモロジー群について調べたい。

補題 3.1. $e_+^n = (0, \cdots, 0, 1)$, $e_-^n = (0, \cdots, 0, -1) \in S^n$ に対し、$S^n - \{e_+^n, e_-^n\} \simeq S^{n-1}$ である。

証明 $i : S^{n-1} \longrightarrow S^n - \{e_+^n, e_-^n\}$ を赤道への包含写像、つまり、$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_n, 0)$ により定義する。また、$r : S^n - \{e_+^n, e_-^n\} \longrightarrow S^{n-1}$ は、$r(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \cdots, x_n)/|(x_1, \cdots, x_n)|$ により与える。$r \circ i = 1_{S^{n-1}}$ であることは容易に確かめられる。

$$F : (S^n - \{e_+^n, e_-^n\}) \times I \longrightarrow S^n - \{e_+^n, e_-^n\}$$

を、$F(x_1, \cdots, x_{n+1}, t) = (x_1, \cdots, x_n, tx_{n+1})/|(x_1, \cdots, x_n, tx_{n+1})|$ で定義すると、これが恒等写像と $i \circ r$ をつなぐホモトピーである。 □

　さて、実際に球面のホモロジー群を求めるが球面の次元が小さいほうから求めていく。まず、0 次元は簡単である。

注意 3.2. $S^0 = \{1, -1\}$ なので、加法性定理と次元定理より、

$$H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

　次に 1 次元である。

補題 3.3. $H_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

証明 S^1 は弧状連結なので、Theorem 1.2 により、$H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である。$S^1 - e_+^1$, $S^1 - e_-^1$ は、S^1 の開被覆である。よって、$(S^1; S^1 - e_+^1, S^1 - e_-^1)$ は切除 3 対。これに対し、Mayer-Vietoris 完全列と補題 3.1 を用いると、

$$\cdots \longrightarrow H_k(S^0) \longrightarrow H_k(S^1 - e_-^1) \oplus H_k(S^1 - e_+^1) \longrightarrow H_{k-1}(S^1) \longrightarrow H_{k-1}(S^0) \longrightarrow \cdots$$

であり、$S^1 - e_+^1$, $S^1 - e_-^1$ はともに可縮なので、$k \geqq 2$ においては、$H_k(S^1) = 0$ である。$k = 1$ のとき、上記の完全列を詳しく見ると、

$$\cdots \longrightarrow H_1(S^1 - e_-^1) \oplus H_1(S^1 - e_+^1) \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow H_0(S^0) \longrightarrow H_0(S^1 - e_-^1) \oplus H_0(S^1 - e_+^1) \longrightarrow \cdots$$

置き換えると、

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

という完全列になるが、ここで元の写像を思い出すと、$\beta(a, b) = (a + b, a + b)$ となることに注意する。今、左端の 3 項の完全列から、α は単射である。準同型定理と完全性を用いると、

$$H_1(S^1) \cong H_1(S^1)/\mathrm{Ker}\alpha \cong \mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Ker}\beta = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid a = -b\} = \{(a, -a) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

□

　最後に一般の n に対してである。

定理 3.4. $n \geqq 1$ において、$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

証明 帰納法で示す。$n = 1$ のときは、補題 3.3 で確かめた。$n \geqq 2$ において、

$$H_k(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n-1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と仮定する。このとき、やはり、$\{S^n; S^n - e_+^n, S^n - e_-^n\}$ が切除 3 対で、$S^n - e_+^n$,$S^n - e_-^n$ がともに可縮であることから、補題 3.3 と同様に Mayer-Vietoris 完全列を考えると、$k \geqq 1$ のとき、$H_k(S^n) \cong H_{k-1}(S^{n-1})$ であり、$k = 0$ のときは、S^n が弧状連結なので、$H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ である。 □