ホモトピー定理

空間が同相ならば、ホモロジー群も同じであることは以前に述べた。実のところホモトピー同値であってもホモロジー群は同じなのである。つまり、ホモロジー群というのがホモトピー不変量であるということを意味する。さらによい性質を満たす空間ならば、ホモロジー群のみでその空間のホモトピー型が決定してしまう。

1　ホモトピー定理

まず、特異単体ではなく、線形的な単体であると境界作用素は見やすくなる。これは単体複体のホモロジー群を定義したり計算する場面で登場する。

定義 1.1. $X \subset \mathbf{R}^n$ を凸集合とし、$a_0, \cdots, a_n \in X$ に対し、

$$[a_0, \cdots, a_n] : \Delta^n \longrightarrow X$$

を、$[a_0, \cdots, a_n](e_i) = a_i$ により定義し、X の線形 n-単体と呼ぶ。また、線形 n-単体全体を $LS_n(X)$ とおき、$LC_n(X) = \mathbb{Z}(LS_n(X))$ とおく。明らかに、$LS_n(X) \subset S_n(X)$、$LC_n(X) \subset C_n(X)$ である。

注意 1.2. $[a_0, \cdots, a_n] \in LS_n(X)$ に対し、

$$d_i[a_0, \cdots, a_n] = [a_0, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_n]$$

であるため、

$$\partial[a_0, \cdots, a_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [a_0, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_n]$$

である。

ホモトピー定理の核はホモトピー $X \times I \longrightarrow Y$ に対し、chain homotopy $C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ を得ることである。このとき普通に考えると、ホモトピーからは $C_{n+1}(X \times I) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$ が得られる。Chain homotopy を構成したかったら、$C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I)$ を考える必要がある。

特異単体とホモトピーの関係を考慮する上で、$\Delta^n \times I$ という多面体（プリズムとよばれる）を考える必要がどうしてもでてくる。面倒なのはこれが単体ではないため、単体に分割しなければならないということである。まず、$i_t : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n \times I$ を、$i_t(x) = (x, t)$ で定義する。ただし、$t = 0, 1$ である。$\Delta^n \times I$ の頂点で、$i_0(e_k) = (e_k, 0) = u_k$, $i_1(e_k) = (e_k, 1) = v_k$ とおいておく。

補題 1.3. 任意の $0 \leqq i \leqq n$ に対し、

$$u_0, u_1, \cdots, u_i, v_i, \cdots, v_n \in \mathbf{R}^{n+2}$$

は一般の位置にある。

証明 $\lambda_1(u_1 - u_0) + \cdots + \lambda_i(u_i - u_0) + \lambda_{i+1}(v_i - u_0) + \cdots + \lambda_{n+1}(v_n - u_0) = 0$ とする。左辺は

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_i u_i + \lambda_{i+1} v_i + \cdots + \lambda_{n+1} v_n - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_0 \\
=&(\lambda_1 e_1, 0) + \cdots + (\lambda_i e_i, 0) + (\lambda_{i+1} e_i, \lambda_i) + \cdots + (\lambda_{n+1} e_n, \lambda_{n+1}) - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_0 \ , 0 \right) \\
=&\left(-\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \ , \ \lambda_1 \ , \ \lambda_2, \cdots , \ \lambda_i + \lambda_{i+1} \ , \ \lambda_{i+2}, \cdots , \ \lambda_{n+1} \ , \ \sum_{j=i+1}^{n+1} \lambda_j \right)
\end{aligned}$$

なので、これら成分がすべて 0 ということは、まず、λ_i, λ_{i+1} 以外はすべて 0 で、最後の成分から $\lambda_{i+1} = 0$、そして最初の成分から、$\lambda_i = 0$ である。 □

定義 1.4. 上記のことより、$< u_0, u_1, \cdots, u_i, v_i, \cdots, v_n >$ は $n+1$ 単体を張る。

$$\tau_i^n = [u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots, v_n] : \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \times I$$

とおき、

$$\pi_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^j \tau_i^n \in S_{n+1}(\Delta^n \times I)$$

と定義する。これはイメージとしてはプリズムを三角形分割して交互和をとったものと考えられる。これより、

$$P_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X \times I)$$

を、$\sigma \in S_n(X)$ に対し、$P_n(\sigma) = (\sigma \times 1_I)_\sharp(\pi_{n+1})$ により定義する。

補題 1.5.

$$(d_j \times 1_I)[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots v_{n-1}] = \begin{cases} [u_0, \cdots, \hat{u_j}, \cdots, u_{i+1}, v_{i+1}, \cdots, v_n] & j \leqq i \\ [u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots, \hat{v_j}, \cdots, v_n] & i < j \end{cases}$$

証明 $j \leqq i$ のとき、さらに次の 3 つの場合を考える。

1. $0 \leqq k \leqq j-1$ のとき、

$$(d_j \times 1_I)[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots v_{n-1}](e_k) = (d_j \times 1_I)(u_k) = (d_j(e_k), 0) = (e_k, 0) = u_k$$

2. $j \leqq k \leqq i$ のとき、

$$(d_j \times 1_I)[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots v_{n-1}](e_k) = (s_j \times 1_I)(u_k) = (d_j(e_k), 0) = (e_{k+1}, 0) = u_{k+1}$$

3. $i+1 \leqq k \leqq n$ のとき、

$$(d_j \times 1_I)[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots v_{n-1}](e_k) = (d_j \times 1_I)(v_{n-1}) = (d_j(e_{k-1}), 1) = (e_k, 1) = v_k$$

これより、

$$(d_j \times 1_I)[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots v_{n-1}] = [u_0, \cdots, \hat{u_j}, \cdots, u_{i+1}, v_{i+1}, \cdots, v_n]$$

同様に、$i < j$ のときも場合分けして確かめられる。 □

次の補題が意味するのは、プリズムの微分が上面、底面、側面の微分に分かれるという意味である。

補題 1.6. $\partial_{n+1}(\pi_{n+1}) = (i_1)_\sharp(1_{\Delta^n}) - (i_0)_\sharp(1_{\Delta^n}) - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j(s^j \times 1_I)_\sharp(\pi_n)$

証明

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}(\pi_{n+1}) &= \partial_{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots, v_n]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots, v_m] \circ d_j \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j[u_0, \cdots, \hat{u_j}, \cdots, u_i, v_i, \cdots, v_n] + \sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^j[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots, \widehat{v_{j-1}}, \cdots, v_n]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j[u_0, \cdots, \hat{u_j}, \cdots, u_i, v_i, \cdots, v_m] + \sum_{j=i}^{n}(-1)^{j-1}[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots, \hat{v_j}, \cdots, v_n]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}[u_0, \cdots, \hat{u_j}, \cdots, u_i, v_i, \cdots, v_n] + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}(-1)^{i+j-1}[u_0, \cdots, u_i, v_i, \cdots, \hat{v_j}, \cdots, v_n]
\end{aligned}$$

上記の式で $j=i$ の部分に着目すると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}(-1)^{2i}[u_0,\cdots,\hat{u}_i,v_i,\cdots,v_n]+\sum_{i=0}^{n}(-1)^{2i-1}[u_0,\cdots,u_i,\hat{v}_i,\cdots,v_n]\\
=&\sum_{i=0}^{n}([u_0,\cdots,\hat{u}_i,v_i,\cdots,v_m]-[u_0,\cdots,u_i,\hat{v}_i,\cdots,v_n])\\
=&[v_0,v_1,\cdots,v_n]-[u_0,u_1,\cdots,u_n]\\
=&(i_1)_\sharp(1_{\Delta^n})-(i_0)_\sharp(1_{\Delta^n})
\end{aligned}$$

残りの部分について、今度は $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(s^j\times 1_I)_\sharp(\pi_n)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(s^j\times 1_I)_\sharp(\pi_n)\\
=&\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(s^j\times 1_I)_\sharp\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i[u_0,\cdots,u_i,v_i,\cdots,v_n]\right)\\
=&\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+j}(s^j\times 1_I)[u_0,\cdots,u_i,v_i,\cdots,v_n]\\
=&\sum_{j=0}^{i}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+j}[u_0,\cdots,\hat{u}_j,\cdots,u_{i+1},v_{i+1},\cdots,v_n]+\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+j}[u_0,\cdots,u_i,v_i,\cdots,\hat{v}_j,\cdots,v_n]\\
=&\sum_{j=0}^{i}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}[u_0,\cdots,\hat{u}_j,\cdots,u_i,v_i,\cdots,v_n]+\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+j-1}[u_0,\cdots,u_i,v_i,\cdots,\hat{v}_j,\cdots,v_n]
\end{aligned}$$

これより、

$$\partial_{n+1}(\pi_{n+1})=(i_1)_\sharp(1_{\Delta^n})-(i_0)_\sharp(1_{\Delta^n})-\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(s^j\times 1_I)_\sharp(\pi_n)$$

であることがわかる。 □

命題 1.7. $f,g:X\longrightarrow Y$ を連続写像、$H:X\times I\longrightarrow Y$ をそれらのホモトピーとする。このとき、

$$H_\sharp\circ P_n:C_n(X)\longrightarrow C_{n+1}(Y)$$

は、$f_\sharp$ と $g_\sharp$ をつなぐ chain homotopy である。

証明 $\sigma\in S_n(X)$ に対し、

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+1}\circ H_\sharp\circ P_n(\sigma)\\
=&\partial_{n+1}\circ H_\sharp\circ(\sigma\times 1_I)_\sharp\pi_{n+1}\\
=&\partial_{n+1}\circ(H\circ(\sigma\times 1_I))_\sharp\pi_{n+1}\\
=&(H\circ(\sigma\times 1_I))_\sharp\circ\partial_{n+1}(\pi_{n+1})
\end{aligned}$$

一方で、

$$
\begin{aligned}
H_\sharp \circ P_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) =& H_\sharp \circ P_{n-1}(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(\sigma \circ d_j)) \\
=& H_\sharp \left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j P_{n-1}(\sigma \circ d_j) \right) \\
=& H_\sharp \sum_{j=0}^{n}(-1)^j((\sigma \circ d_j) \times 1_I)_\sharp \pi_n \\
=& H_\sharp \sum_{j=0}^{n}(-1)^j((\sigma \times 1_I) \circ (d_j \times 1_I))_\sharp \pi_n \\
=& H_\sharp \sum_{j=0}^{n}(-1)^j((\sigma \times 1_I)_\sharp \circ (s_j \times 1_I)_\sharp \pi_n \\
=& (H \circ (\sigma \times 1_I))_\sharp \left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(s_j \times 1_I)_\sharp \pi_n \right)
\end{aligned}
$$

これより、補題 1.6 から、

$$
\begin{aligned}
& \partial_{n+1} \circ H_\sharp \circ P_n(\sigma) + H_\sharp \circ P_{n-1} \circ \partial_n(\sigma) \\
=& (H \circ (\sigma \times 1_I))_\sharp \left(\partial_{n+1}(\pi_{n+1}) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j(s_j \times 1_I)_\sharp \pi_n \right) \\
=& (H \circ (\sigma \times 1_I))_\sharp \left((i_1)_\sharp(1_{\Delta^n}) - (i_0)_\sharp(1_{\Delta^n})\right) \\
=& \left((H \circ (\sigma \times 1_I) \circ i_1)_\sharp - (H \circ (\sigma \times 1_I) \circ i_0)_\sharp\right)(1_{\Delta^n}) \\
=& (g \circ \sigma - f \circ \sigma)_\sharp(1_{\Delta^n}) \\
=& g \circ \sigma - f \circ \sigma \\
=& (g_\sharp - f_\sharp)(\sigma)
\end{aligned}
$$

□

定理 1.8 (ホモトピー定理). $f : X \longrightarrow Y$ をホモトピー同値写像とすると、$f_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ は同型である。

証明 仮定より、ホモトピー逆写像 $g : X \longrightarrow Y$ が存在し、$g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$ である。命題 1.7 と chain homotopic な chain map から誘導されたホモロジー群の準同型が等しいことから、f_* の逆写像は g_* となる。 □

系 1.9. X が可縮ならば、$H_*(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

証明 次元定理とホモトピー定理による。 □