対空間のホモロジー群

ここでは特異ホモロジー群の一般化として、対空間の特異ホモロジー群について考える。対空間にするとさらにホモロジー群の定義が複雑になるが、それでも利便性が高い。

1　対空間のホモロジー群

定義 1.1. X を位相空間、$A \subset X$ をその部分空間とする。このとき、(X, A) と書き、位相空間対と呼ぶ。さらに、$B \subset A \subset X$ を部分空間とするとき、(X, A, B) と書き、3 対の位相空間と呼ぶ。

注意 1.2. (X, A) を対空間としたとき、$i : A \longrightarrow X$ を包含写像とすると、$S_n(A) \longrightarrow S_n(X)$ が誘導される。明らかにこれは単射である。よって、$i_\sharp : C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$ も単射準同型である。よって、微分も同じなので $C(A)$ は $C(X)$ の sub complex と見なせる。

ちなみに、$i_* : H_*(A) \longrightarrow H_*(X)$ は単射かどうかは定かでない。

定義 1.3. (X, A) を対空間としたとき、$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ とおく。これは再び chain complex となることは、一般論の中で示した。このホモロジーを $H_*(X, A)$ で表し、対空間 (X, A) のホモロジー群と呼ぶ。

対空間のホモロジーが通常のホモロジーの一般というのは、次の事実による。

注意 1.4. $C(\phi) = \{0\}$ なので、

$$C(X, \phi) = C(X)/C(\phi) = C(X)/\{0\} = C(X)$$

よって、$H_*(X, \phi) = H_*(X)$ である。

補題 1.5. $H_*(X, X) = 0$ である。

証明 $Cn(X, X) = C(X)/C(X) = \{0\}$ より導かれる。 □

次に写像の対応を考えてみる。

定義 1.6. (X, A), (Y, B) をそれぞれ、対空間とする。このとき、

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

が対空間の写像とは、$f : X \longrightarrow Y$ が連続写像で、$f(A) \subset B$ を満たすことである。

このことから、特異 chain complex に誘導される準同型に対し、$f_\sharp(C(A)) \subset C(B)$ が成り立ち、つまり、このことから、商群の間の準同型

$$C(X, A) \longrightarrow C(X, B)$$

が誘導され、chain map となる。これより、

$$f_* : H_*(X, A) \longrightarrow H_*(Y, B)$$

も誘導される。これらの写像の対応ももちろん関手的、つまり恒等射と合成を保っている。

気になるのは、対空間 (X, A) に対し、$H_*(X, A)$ と $H_*(X/A)$ の違いである。似ているようでいて、定義はたどっていけば違うということがわかる。つまり、$C(X)/C(A)$ と $C(X/A)$ の違いである。一般的にこれらは同型にはならない。しかし、(X, A) がよい条件を満たせば、chain homotopy 同値となり、ホモロジー群としては同型であることがわかる。

ここからは、特異ホモロジー論の中で最も重要な 5 つの定理を証明する。次元定理、完全性定理、加法性定理、ホモトピー定理、切除定理である。

2　次元定理

まずは最も簡単と思われる次元定理から。しかし、これが一番重要でもあったりする。この定理は関数でいうところの初期値を定めるようなもので、これをはっきりさせておかないと具体的な計算をすることは難しい。この定理は一点空間のホモロジーは何なのかというものである。具体的に空間のホモロジー群を計算する際には、安易な空間に帰着させて考える場合がおおいが、その最も安易な場合がこれである。

定理 2.1 (次元定理). $H_n(\{x\}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

証明 $n \geqq 0$ において、連続写像 $\Delta^n \longrightarrow \{x\}$ は定値写像 c_n 以外ないので、$S_n(X) = \{c_n\}$ で一点集合、よってその自由アーベル化は $C_n(X) = \mathbb{Z}\{c_n\} \cong \mathbb{Z}$ である。あとは微分がどうなっているのかを観察するが、定義より、$\partial_n : C_n(\{x\}) \longrightarrow C_{n-1}(\{x\})$ は、

$$\partial_n(c_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_n \circ d_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_{n-1}$$

である。よって、n が奇数、または 0 のとき $\partial_n = 0$ であり、0 より大きい偶数のとき $\partial_n = 1$ となることがわかる。よって、n が

1. 0 より大きな偶数のとき、$\mathrm{Ker}\partial_n = 0$ なので、$H_*(\{x\}) = 0$ となる。

2. 奇数のとき、$\mathrm{Ker}\partial_n = C_n(\{x\}), \mathrm{Im}\partial_{n+1} = C_n(\{x\})$ なので、$H_*(\{x\}) = 0$ である。

3. 最後に $n = 0$ のとき、$\mathrm{Ker}\partial_0 = C_0(\{x\}), \mathrm{Im}\partial_1 = 0$ なので、$H_0(\{x\}) = C_0(\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ である。

□

3　完全性定理

次に完全性定理の証明であるが、これは chain complex での完全列を用いれば証明はほぼ８割方終わっている。非常に有用性の高い定理である。

注意 3.1. (X, A) と対空間とする。$C(X, \phi) = C(X)$ であった。このとき、対空間の写像、$j : (X, \phi) \longrightarrow (X, A)$ を恒等射で与える。このとき、

$$j_\sharp : C(X) = C(X, \phi) \longrightarrow C(X, A) = C(X)/C(A)$$

は $x \mapsto [x]$ で与えられるから射影である。

定理 3.2 (完全性定理). (X, A) を対空間とすると、次の長い完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

証明 $0 \longrightarrow C(A) \xrightarrow{i_\sharp} C(X) \xrightarrow{j_\sharp} C(X, A) \longrightarrow 0$ は短完全列であることから導かれる。 □

命題 3.3. 対空間の写像、$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ に対し、

$$\partial \circ f_* = f_* \circ \partial : H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(B)$$

である。つまり、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "f_*"'] \\ H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"'] & H_{n-1}(B) \end{tikzcd}$$

証明 $H_n(X,A)$ の元は、$x \in C_n(X)$ に対し、$[[x]] \in H_n(X,A)$ と表せる。

$$\partial \circ f_*[[x]] = \partial[[f_\sharp x]] = [[\partial_n \circ f_\sharp x]]$$

であり、一方で $f_\sharp$ は chain map なので、

$$f_* \circ \partial[[x]] = f_*[[\partial_n x]] = [[f_\sharp \circ \partial_n x]] = [[\partial_n \circ f_\sharp x]]$$

となり、$\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$ である。 □

３対の空間に対しても、長い完全列は構成できる。

補題 3.4. $C \subset B \subset A$ を A の部分群列とする。このとき、包含写像から誘導される写像 $B/C \longrightarrow A/C$ は単射である。このとき、$(A/C)/(B/C) \cong A/B$ である。

証明 射影 $p : A \longrightarrow A/C$ から、$\tilde{p} : A/B \longrightarrow (A/C)/(B/C)$ が誘導される。射影からの誘導なので全射であり、$p^{-1}(B/C) = B$ なので、$\tilde{p}$ は単射である。 □

定理 3.5. (X,A,B) を３対の空間とする。対空間の包含写像、$i : (A,B) \longrightarrow (X,B)$、$j : (X,B) \longrightarrow (X,A)$ とする。このとき、

$$\cdots \longrightarrow H_n(A,B) \xrightarrow{i_*} H_n(X,B) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A,B) \longrightarrow \cdots$$

証明 補題 3.4 により、$(C(A)/C(B))\,/\,(C(X)/C(B)) \cong C(X)/C(A)$ なので、

$$0 \longrightarrow C(A)/C(B) \longrightarrow C(X)/C(B) \longrightarrow C(X)/C(A) \longrightarrow 0$$

は短完全列。ここから、題意の完全列が誘導される。 □

4 加法性定理

加法性定理は空間の直和のホモロジー群はそれぞれの空間のホモロジー群の直和に分かれる、というもの。まず、無限個の群の直積と直和について復習しておく。有限個の場合にはどちらも同じなので特に注意する必要はないのだが。

定義 4.1. $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をアーベル群の族とする。このとき、

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \{\ \varphi\ :\ \Lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \mid\ ^\forall\lambda \in \Lambda に対し、\varphi(\lambda) \in G_\lambda\ \}$$

とおき、φ , $\chi \in \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ に対し、和

$$\varphi + \chi : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$$

を、$\varphi + \chi(\lambda) = \varphi(\lambda) + \chi(\lambda)$ で定義する。これを $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積と呼ぶ。これは集合としての直積に、それぞれの成分ごとの和を用いて群と見たものである。一方、有限個の成分の形式和を集め、

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \left\{\sum g_\lambda \mid g_\lambda \in G_\lambda\right\}$$

と定義し、和の構造は各成分ごと行うとすると、これがアーベル群の直和である。

$\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を群の族、そして、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し、$f_\lambda : G_\lambda \longrightarrow H_\lambda$ が与えられているとする。このとき、

$$\prod f_\lambda : \prod G_\lambda \longrightarrow \prod H_\lambda$$

が、$\varphi \mapsto (\coprod f_\lambda) \circ \varphi$ により定義される。また、

$$\bigoplus f_\lambda : \bigoplus G_\lambda \longrightarrow \bigoplus H_\lambda$$

が、$\sum g_i \mapsto \sum f_\lambda(g_\lambda)$ により定義される。同じように、$f_\lambda : G_\lambda \longrightarrow H$ という写像の族に対し、

$$\sum f_\lambda : \bigoplus G_\lambda \longrightarrow H$$

が、$\sum f_\lambda(\sum g_{\lambda_i}) = \sum f_{\lambda_i}(g_{\lambda_i})$ により、与えられる。

同様にして chain complex の族に対しても、各次元での直積、直和が考えられ、境界作用素も直積、直和によって与えられる。これにより、chain complex の直積、直和が考えられる。

補題 4.2. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし、$X = \coprod X_\lambda$ とする。包含写像、

$$i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$$

に対し、$S(i_\lambda) : S(X_\lambda) \longrightarrow S(X)$ が誘導される。さらにここから誘導される写像、

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} S(i_\lambda) : \coprod_{\lambda\in\Lambda} S_n(X_\lambda) \longrightarrow S_n(X)$$

は全単射である。

証明 各 $S(i_\lambda)$ は単射なので、$\coprod_{\lambda\in\Lambda} S(i_\lambda)$ も単射である。また、$\sigma \in S_n(X)$ をとると、これは連続写像

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow \coprod X_\lambda$$

であるから、ある $\lambda \in \Lambda$ に対し、$\sigma(\Delta^n) \subset X_\lambda$ となっている。よって、$\sigma \in S_n(X_\lambda)$ と考えられ、$\coprod S(i_\lambda)(\sigma) = \sigma$ なので全射も言える。 □

補題 4.3. $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合の族とする。このとき、$\coprod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda = S$ とおくと、包含写像、$S_\lambda \longrightarrow S$ から誘導される写像、

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z}(S_\lambda) \longrightarrow \mathbb{Z}S$$

は同型である。

証明 関手の言葉を用いれば、$\mathbb{Z}(-)$ という集合からアーベル群への関手は忘却関手の左随伴なので直和を保つためである。しかし、実際に両辺の元の形と写像を見てみれば、

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z}(S_\lambda) \longrightarrow \mathbb{Z}S$$

は、$\sum a_i s_i \mapsto \sum a_i s_i$ で与えられるので同型である。 □

系 4.4. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし、$X = \coprod X_\lambda$ とする。包含写像、

$$i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$$

に対し、$i_{\lambda\sharp} : C(X_\lambda) \longrightarrow C(X)$ が誘導される。

$$\sum i_{\lambda\sharp} : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C(X_\lambda) \longrightarrow C(X)$$

は同型である。

補題 4.5. $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をアーベル群の族, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し、$H_\lambda \subset G_\lambda$ を部分群とする。このとき、$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ は、$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ の部分群とみなせる。このとき、

$$\bigoplus G_\lambda / \bigoplus H_\lambda \cong \bigoplus (G_\lambda / N_\lambda)$$

である。

証明 $p_\lambda : G_\lambda \longrightarrow G_\lambda/N_\lambda$ を射影とする。

$$\oplus p_\lambda : \bigoplus G_\lambda \longrightarrow \bigoplus G_\lambda/N_\lambda$$

は全射準同型である。ここで、

$$\mathrm{Ker}(\oplus p_\lambda) \cong \bigoplus \mathrm{Ker}(p_\lambda) = \bigoplus N_\lambda$$

となって準同型定理より、$\bigoplus G_\lambda / \bigoplus N_\lambda \cong \bigoplus (G_\lambda/N_\lambda)$ □

定理 4.6 (加法性定理). $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし、$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく。包含写像 $i_\lambda : X_\lambda \longrightarrow X$ に対し、$i_{\lambda *} : H_*(X_\lambda) \longrightarrow H_*(X)$ から誘導される、

$$\sum i_{\lambda *} : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_*(X_\lambda) \longrightarrow H_*(X)$$

は同型となる。

証明 系 4.4 と、補題 4.5 による。 □

この定理は対空間にも拡張できる。

定理 4.7. $\{(X_\lambda\, , A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間対の族, $(X, A) = (\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)$ とおく。包含写像 $i_\lambda : (X_\lambda, A_\lambda) \longrightarrow (X, A)$ に対し、

$$\sum i_{\lambda *} : \bigoplus H_*(X_\lambda, A_\lambda) \longrightarrow H_*(X, A)$$

は同型である。

証明 証明は５項補題と完全性定理を用いる。つまり、次の可換図で、

$$\begin{tikzcd}
\oplus H_n(A_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \oplus H_n(X_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \oplus H_n(X_\lambda, A_\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus H_{n-1}(A_\lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \oplus H_{n-1}(X_\lambda) \arrow[d, "\cong"'] \\
H_n\left(\coprod A_\lambda\right) \arrow[r] & H_n\left(\coprod X_\lambda\right) \arrow[r] & H_n(X, A) \arrow[r] & H_{n-1}\left(\coprod A_\lambda\right) \arrow[r] & H_{n-1}\left(\coprod X_\lambda\right)
\end{tikzcd}$$

上下横列は完全列、そして加法性定理で真ん中以外の縦列は同型なので５項補題より、真ん中も同型である。 □