コファイブレーションとレトラクション

さて、被約ホモロジーを考えると、以前言っていた対空間 (X, A) に対するホモロジー $H_*(X, A)$ と、$H_*(X/A)$ の関係を正確に述べることができる。$p : X \longrightarrow X/A$ を射影とすると、これは対空間の写像、$p : (X, A) \longrightarrow (X/A, *)$ と考えることができる。これより、$p_* : H_*(X, A) \longrightarrow \widetilde{H}_*(X/A)$ を誘導することになる。問題はこれが同型であるかということだが、いつでもそうなっているわけではない。次に考えるのは、これがいつ同型になるかということである。

1　コファイブレーション

対空間 (X, A) を考えることは、包含写像 $i : A \longrightarrow X$ を考えていることと同じである。コファイブレーションとはこの包含写像がよい性質（ホモトピー拡張性質）を持つものをさす。コファイブレーションはホモロジー群の完全列と深い関係にある。双対的な概念のファイブレーションはホモトピー群の完全列と深い関係がある。

定義 1.1. 包含写像 $i : A \longrightarrow X$ が、位相空間 Y に対し、ホモトピー拡張性質を持つとは、任意の連続写像 $f : X \longrightarrow Y$, $H : A \times I \longrightarrow Y$ で、$H_{|A\times\{0\}} = f \circ i$ に対し、$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow Y$ が存在し、$H = \widetilde{H}_{|A\times I}$, $f = \widetilde{H}_{|X\times\{0\}}$ を満たすことを指す。つまり、可換図式で説明すると、

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \times \{0\} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
A \times I \arrow[ur, "H"] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}$$

という実線の可換図に対し、右上と右下の両方を可換にする $\widetilde{H}$ が存在するということである。

任意の空間 Y に対し、$i : A \longrightarrow X$ がホモトピー拡張性質を持つとき、i をコファイブレーションと呼ぶ。

命題 1.2. 空間対 (X, A) に対し、$* \in X/A$ を A を潰した点とする。$q : C_i \longrightarrow X/A$ を、射影 $X \longrightarrow X/A$ と $CA \longrightarrow *$ から得られる射影とする。$i : A \longrightarrow X$ がコファイブレーションならば、p はホモトピー同値である。

証明 $A \times I \longrightarrow CA$ を射影、$X \longrightarrow C_i$ を底面への包含写像とする。

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \times \{0\} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& C_i & \\
A \times I \arrow[ur] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}$$

よってホモトピー拡張性質から、上の図式を可換にする $\widetilde{H}$ が存在する。このとき、$\widetilde{H}_1 : X \longrightarrow C_i$ を、$x \mapsto \widetilde{H}(x, 1)$ で定義すると、$\widetilde{H}_1(A) = *$ なので、これは、$h : X/A \longrightarrow C_i$ を誘導する。$q \circ \widetilde{H} : X \times I \longrightarrow X/A$ を考えると、$q \circ \widetilde{H}(A \times I) = *$ なので、そこから誘導されるホモトピー $F : (X/A) \times I \longrightarrow X/A$ が、$q \circ h \simeq 1_{X/A}$ を導く。逆に、$h \circ q \simeq 1_{C_i}$ は、$CA \simeq *$ のホモトピー $CA \times I \longrightarrow CA$ と、$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow C_i$ をあわせた、$C_i \times I \longrightarrow C_i$ から得られる。 □

定理 1.3. $i : A \longrightarrow X$ をコファイブレーションとし、$p : (X, A) \longrightarrow (X/A, *)$ を射影とすると、$p_* : H_*(X, A) \longrightarrow \widetilde{H}_*(X/A)$ は同型である。

証明 $(C_i; X \times \{0\}, CA)$ は切除３対であるため、

$$i_* : H_*(X, A) \longrightarrow H_*(C_i, CA)$$

は同型である。また、命題 1.2 により、射影より誘導される準同型

$$q_* : H_*(C_i, CA) \longrightarrow H_*(X/A, *) = \widetilde{H}_*(X/A)$$

は同型である。また、これらの合成が、p_* であることも明らかである。 □

系 1.4. (X, A, x_0) を基点つきの対空間とする。$i : A \longrightarrow X$ がコファイブレーションであれば、被約ホモロジー群の長い完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{p_*} \widetilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

例 1.5. コファイブレーションの例を紹介する。

1. $f : X \longrightarrow Y$ に対し、$M_f = Y \cup_f X \times I$ という写像柱を思い出す。上面への包含写像 $i : X \longrightarrow M_f$, $i(x) = (x, 1)$ はコファイブレーションである。

2. $f : X \longrightarrow Y$ に対し、$C_f = Y \cup_f CX$ という写像錐を思い出す。下面への包含写像 $j : Y \longrightarrow C_f$ はコファイブレーションである。

これらはコファイブレーションとして考えるより、次の NDR 対として考えると理解しやすい。

2 レトラクション

コファイブレーションと近い概念として、NDR 対という概念がある。NDR は Neighborhood of Deformation Retract まずは

定義 2.1. (X, A) を対空間とし、$i : A \longrightarrow X$ を包含写像とする。

1. $r : X \longrightarrow A$ で、$r \circ i = 1_A$ を満たすものをレトラクションという。また、レトラクションが存在するとき、A は X のレトラクトと呼ぶ。

2. さらに、$i \circ r \simeq 1_X$ のとき、変位レトラクション（レトラクト）とよぶ。

3. さらにそのホモトピーが A を止めて取れるとき、つまり、$H : X \times I \longrightarrow X$ で、任意の $(a, t) \in A \times I$ において、$H(a, t) = a$ を満たすとき、強変位レトラクション（レトラクト）と呼ぶ。

例 2.2.

1. $* \in X$ に可縮な空間 X において、$\{*\}$ は X の変位レトラクトである。

2. $f : X \longrightarrow Y$ に対し、$M_f \longrightarrow Y$ を $y \mapsto y$, $(x, t) \mapsto f(x)$ により定義すると強変位レトラクションである。

命題 2.3. (X, A) を対空間とする。$i : A \longrightarrow X$ がコファイブレーションであることと、$(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ が $X \times I$ のレトラクトであることは同値である。

証明 $i : A \longrightarrow X$ をコファイブレーションとする。このとき、$A \times I \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, $X \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ を包含写像としたとき、

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \times \{0\} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& (X \times \{0\}) \cup (A \times I) & \\
A \times I \arrow[ur, "H"] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "r"']
\end{tikzcd}$$

により、レトラクションが構成できる。逆に、レトラクション

$$r : X \times I \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$$

が存在したとする。このとき、

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \times \{0\} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
A \times I \arrow[ur, "H"] \arrow[rr] & & X \times I
\end{tikzcd}$$

の可換図式に対し、

$$(f \cup H) \circ r : X \times I \longrightarrow Y$$

が求めるホモトピーの拡張である。 □

定義 2.4. 対空間 (X, A) が NDR 対であるとは、$u : X \longrightarrow I$ と、$h : X \times I \longrightarrow X$ が存在し、次の条件を満たす。

1. $u^{-1}(0) = A$
2. $(a, t) \in A \times I$ に対し、$h(a, t) = a$
3. $x \in X$ に対し、$h(x, 0) = x$
4. $h(u^{-1}([0, 1)) \times \{1\}) \subset A$

このときの写像 (u, h) を (X, A) の NDR 表現とよぶ。また、基点つき空間 (X, x_0) が空間対として NDR 対の時、x_0 を非退化な基点と呼ぶ。さらに条件 4) の代わりに、$h(X \times \{1\}) \subset A$ になるとき、(X, A) を DR 対と呼ぶ。

大雑把に言って、NDR とは空間そのものの性質で簡単に言えば $[0, 1]$ という高さがあって、1 の部分を 0 を動かさずに引き伸ばすことができるというようなものである。

補題 2.5. (X, A) を DR 対とすれば、A は X のレトラクトである。

証明 (X, A) の DR 表現を (u, h) とすれば、$h_1 : X \longrightarrow A$, $h_1(x) = h(x, 1)$ がレトラクションである。 □

命題 2.6. (X, A) ,(Y, B) を NDR 対とする。このとき、$(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ は NDR 対である。

証明 (u, h), (v, j) をそれぞれ、(X, A), (Y, B) の NDR 表現とする。$w : X \times Y \longrightarrow I$ を、$w(x, y) = u(x)v(y)$ で定義する。

$$\begin{aligned}
w^{-1}(0) &= \{(x, y) \in X \times Y \mid w(x, y) = 0\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y \mid u(x)v(y) = 0\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y \mid u(x) = 0 \text{ または、} v(y) = 0\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A \text{ または、} y \in B\} \\
&= X \times B \cup A \times Y
\end{aligned}$$

次に、$k : X \times Y \times I \longrightarrow X \times Y$ を次で定義する。

$$k(x, y, t) = \begin{cases} (x, y) & u(x) = v(y) = 0 \\ (h(x, t), j(y, \frac{u(x)}{v(y)} t)) & v(y) > 0, v(y) \geqq u(x) \\ (h(x, \frac{v(y)}{u(x)} t), j(y, t)) & u(x) > 0, u(x) \geqq v(y) \end{cases}$$

$k(x, y, 0) = (x, y)$ であり、$(x, y) \in X \times B \cup A \times Y$ に対し、$k(x, y, t) = (x, y)$ である。さらに、$0 \leqq w(x, y) < 1$ とすると、$u(x) \neq 1$、または、$v(y) \neq 1$ なので、$k(x, y, t) \in X \times B \cup A \times Y$ となる。 □

系 2.7. (X, A), (Y, B) を NDR 対でいづれかが DR 対とする。このとき、$(X\times Y, X\times B\cup A\times Y)$ も DR 対である。

証明 (X, A) が DR pair とする。(X, A) の DR 表現を (u, h) としたとき、

$$u' : X \longrightarrow I$$

を、$u'(x) = \dfrac{1}{2}u(x)$ と定義すると、$u'^{-1}(0) = A$ となり、(u', h) は (X, A) の DR 表現である。この (u', h) と (Y, B) の NDR 表現 (v, j) に対し、$(X\times Y\ ,\ X\times B\cup A\times Y)$ の NDR 表現 (w, k) を補題 2.6 と同様に定義する。このとき、

$$\begin{aligned}
w^{-1}([0,1)) &= \{\ (x,y)\in (X\times Y) \mid 0 \leqq w(x,y) < 1\} \\
&= \{(x,y)\in (X\times Y) \mid 0 \leqq u'(x)j(y) < 1\} \\
&= \{(x,y)\in (X\times Y) \mid 0 \leqq \frac{1}{2}u(x)j(y) < 1\} \\
&= \{(x,y)\in (X\times Y) \mid 0 \leqq u(x)j(y) < 2\} \\
&= X\times Y
\end{aligned}$$

これより、$k(X\times Y\times\{1\}) \subset X\times B\cup A\times Y$ となる。 □

例 2.8. $(I, \{0\})$ は DR 対である。

証明 $u = 1_I : I \longrightarrow I$ とすれば、$u^{-1}(0) = \{0\}$ である。また、$h : I\times I \longrightarrow I$ を、$h(t, s) = t(1-s)$ と定義すると、$h(t, 0) = t$, $h(0, s) = 0$, $h(t, 1) = 0$ より、$(I, \{0\})$ は DR 対である。 □

定理 2.9. (X, A) を対空間、A を閉集合としたとき、次の条件は同値である。

1. (X, A) が NDR 対。
2. $(X\times I, X\times\{0\}\cup A\times I)$ は DR 対。
3. $X\times\{0\}\cup A\times I$ は、$X\times I$ のレトラクト。
4. $i : A \longrightarrow X$ はコファイブレーション。

証明 1) $\Longrightarrow$ 2) は系 2.7 と例 2.8 から、また、2) $\Longrightarrow$ 3) は補題 2.5 から、3) $\Longleftrightarrow$ 4) は命題 2.3 から示される。よって、3) $\Longrightarrow$ 1) を示せばよい。$r : X\times\{0\}\cup A\times I \longrightarrow X\times I$ をレトラクションとし、$p_1 : X\times I \longrightarrow X$, $p_2 : X\times I \longrightarrow I$ をそれぞれの成分への射影とする。

$$u : X \longrightarrow I$$

を、$u(x) = \sup\{t - p_2\circ r(x,t) \mid t\in I\}$ により定義する。$t - p_2\circ r(x,t) \leqq t \leqq 1$ であり、$t = 0$ のとき、$t - p_2\circ r(x,t) = 0$ であるので、$0 \leqq u(t)$ となり、値域に収まっている。

$$h : X\times I \longrightarrow X$$

は、$h(x,t) = p_1\circ r(x,t)$ により定義する。(u, h) は NDR 対であることを確かめる。$(a,t)\in A\times I$ に対し、$h(a,t) = p_1\circ r(a,t) = p_1(a,t) = a$ また、$x\in X$ に対し、$h(x,0) = p_1\circ r(x,0) = p_1(x,0) = x$ となる。である。次に、$x\in u^{-1}([0,1))$ に対し、$h(x,t)\in A$ を示す。$h(x,t) = p_1\circ r(x,t)$ なので、$r(x,t)\in A\times I \subset X\times\{0\}\cup A\times I$ を示せばよい。今、$r(x,t)\in (X-A)\times\{0\}$ と仮定する。よって、$p_2\circ r(x,t) = 0$ である。よって、

$$u(x) = \{t - p_2\circ r(x,t) \mid t\in I\} = \sup\{t|\ t\in I\} = 1$$

これは、$x\in u^{-1}([0,1))$ に矛盾する。最後に $u^{-1}(0) = A$ を示す。まずは、$a\in A$ に対し、

$$u(a) = \sup\{t - p_2\circ r(a,t) \mid t\in I\} = \sup\{t - p_2(a,t)\ |t\in I\ \} = \sup\{\ t - t \mid t\in I\} = 0$$

なので、$a \in u^{-1}(0)$ である。逆に、$x \in u^{-1}(0)$ とする。よって、

$$u(x) = \sup\{t - p_2 \circ r(x,t) |\ t \in I\} = 0$$

であるが、これより、任意の $t \in I$ に対し、$t - p_2 \circ r(x,t) \leqq 0$ である。つまり、$p_2 \circ r(x,t) \geqq t$ である。よって、任意の $t > 0$ に対し、$p_2 \circ r(x,t) > 0$ となる。ここで、$x \in X - A$ と仮定する。A が閉集合なので、$(X-A) \times \{0\}$ は開集合である。よって、$r^{-1}((X-A) \times \{0\})$ は $X \times I$ の開集合である。r はレトラクションなので、$(x,0) \in r^{-1}((X-A) \times \{0\})$ であり、よってこの開近傍として、$x \in O$, $0 \in [0,\varepsilon)$ というそれぞれ X と I の関集合が存在し、

$$(x,0) \in O \times [0,\varepsilon) \subset r^{-1}((X-A) \times \{0\})$$

となる。$t = \dfrac{\epsilon}{2}$ とでもおけば、

$$(x,t) \in O_X \times [0,\epsilon) \subset r^{-1}((X-A) \times \{0\})$$

つまり、$r(x,t) \in (X-A) \times \{0\}$ となり、$p_2 \circ r(x,t) = 0$ であるが、これは矛盾である。 □