被約ホモロジー群

ホモロジー群の亜種ともいえるのが被約ホモロジー群である。主に基点つき空間の場合には、被約柱、錐、懸垂などを考えたように、ホモロジーも被約な物が考えられる。とはいっても、通常のホモロジー群とほとんど変わらない。変わるところといえば、0 次の部分ぐらいである。

1　被約ホモロジー群

被約ホモロジー群の定義には様々あるが、一番わかりやすいのは次のものだろう。

定義 1.1. (X, x_0) を基点つき空間とする。このとき、$\widetilde{H}_*(X) = H_*(X, x_0)$ と対空間のホモロジーとして定義し、これを (X, x_0) の被約ホモロジー群という。

注意 1.2. 直ちにわかる性質としては次のようなものがある。

1. 一般に $H_*(X, X) = 0$ なので、$\widetilde{H}_*(x_0) = 0$ である。
2. (X, A, x_0) の 3 対に対し、

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

という長い完全列がある。

補題 1.3. $0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ を短完全列とする。このとき、$h : C \longrightarrow A$ で、$g \circ h = 1_C$ を満たすものを、g の右側分解準同型とよぶ。このような h が存在するとき、$f + h : B \oplus C \longrightarrow A$, $(b, c) \mapsto f(b) + h(c)$ は同型となる。

証明 全射を示す。$a \in A$ に対し、$a - h(g(a)) \in a$ を考えると、$g(a - h(g(a))) = 0$ となるため、$a - h(g(a)) \in \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$ であるから、$b \in B$ が存在し、$f(b) = a - h(g(a))$ を満たす。これより、$(f + h)(b, g(a)) = f(b) + h(g(a)) = a$ となり、全射である。

次に単射である。$(f + h)(b, c) = 0$ とすると、$g((f + h)(b, c)) = 0$ であるが、一方、

$$g((f + h)(b, c)) = g(f(b) + h(c)) = g(f(b)) + g(h(c)) = c$$

であるため、$c = 0$ であることがわかる。よって、$(f + h)(b, c) = 0$ からは、$f(b) = 0$ となるが、f は単射なので、$b = 0$ である。 □

もちろん反対側においても同様なことが言える。

系 1.4. $0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ を短完全列とする。このとき、$h : A \longrightarrow B$ で、$h \circ f = 1_B$ を満たすものを、f の左側分解準同型とよぶ。このような h が存在するとき、$(h, g) : A \longrightarrow B \oplus C$, $a \mapsto h(a) + g(c)$ は同型となる。

このような完全列を分解短完全列と呼ぶ。

さて、(X, x_0) を基点つき空間としたとき、$i : \{x_0\} \longrightarrow X$ を基点への包含写像、$p : X \longrightarrow \{x_0\}$ を一点への射影とすると、$p \circ i = 1_{x_0}$ である。このことから、$i_* : H_*(\{x_0\}) \longrightarrow H_*(X)$, $p_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(\{x_0\})$ に対しても、$p_* \circ i_* = 1_{H_*(\{x_0\})}$ であることがわかる。これより、i_* は単射で、p_* は全射である。

命題 1.5. $H_n(X) \cong \widetilde{H}_n(X) \oplus H_n(\{x_0\})$ である。

証明 (X, x_0) から導かれる完全列の一部を考えると、

$$0 \longrightarrow H_n(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow 0$$

は分解短完全列である。これより、系 1.4 から従う。 □

系 1.6. $n \geqq 1$ においては、$H_n(X) \cong \widetilde{H}_n(X)$ である。

2 被約ホモロジー群の基本定理

対空間のホモロジー群で重要だった５つの定理の被約ホモロジー群バージョンを紹介する。

まずは次元定理であるが、被約ホモロジーの場合には１点空間は 0 だったので、２点の空間 $S^0 = \{1, -1\}$ の被約ホモロジーがどうなっているのかが基準となる。

定理 2.1 (次元定理). $\widetilde{H}_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

証明 $k \geqq 1$ においては、$\widetilde{H}_k(S^0) \cong H_k(S^0) = 0$ である。また、

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(S^0) \cong \widetilde{H}_0(S^0) \oplus \mathbb{Z}$$

より、$\widetilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$ である。 □

次に完全性定理であるが、それはコファイブレーションの節で述べた。

定理 2.2 (完全性定理). (X, A, x_0) 基点つき対空間に対し、$i : A \longrightarrow X$ をコファイブレーションとすれば、射影 $p : X \longrightarrow X/A$ に対し、

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{p_*} \widetilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

という完全列が存在する。

ホモトピー定理は対空間の場合で示した。

定理 2.3 (ホモトピー定理). $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ を基点を保つ写像でホモトピー同値写像とする。このとき、$f_* : \widetilde{H}_*(X) \longrightarrow \widetilde{H}_*(Y)$ は同型

加法性定理に関しては、基点つき空間で行うため、直和の変わりにウェッジ和を用いる。

定理 2.4 (加法性定理). $\{(X_\lambda, x_{\lambda_0})\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非退化な基点付き空間の族とする。$X = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とおき、その基点を $*$ で書く。包含写像、$i_\lambda : (X_\lambda, x_{\lambda_0}) \longrightarrow (X, *)$ から誘導される写像、

$$i : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \widetilde{H}_*(X_\lambda) \longrightarrow \widetilde{H}_*(X)$$

は同型である。

証明 一般に NDR 対の直和は NDR 対であるため、$\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda \in \Lambda} \{x_{\lambda_0}\}\right)$ は NDR 対である。よって、射影から誘導される

$$H_*\left(\coprod X_\lambda, \coprod \{x_{\lambda_0}\}\right) \longrightarrow \widetilde{H}_*(X)$$

は同型である。また対空間のホモロジー群の加法性定理から、

$$\bigoplus H_*(X_\lambda, \{x_{\lambda_0}\}) \longrightarrow H_*\left(\coprod X_\lambda, \coprod \{x_{\lambda_0}\}\right)$$

も同型である。この２つの同型の合成から、求める同型が得られる。 □

最後に切除定理に変わり、懸垂同型定理を紹介する。

定理 2.5 (懸垂同型定理). (X, x_0) に対し、次の同型写像、

$$\Sigma : \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$$

が存在し、任意の基点つき写像 $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_n(X) \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "f_*"] & \widetilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \arrow[d, "(\Sigma f)_*"] \\
\widetilde{H}_n(Y) \arrow[r, "\Sigma"] & \widetilde{H}_{n+1}(\Sigma Y)
\end{tikzcd}$$

証明 対空間 (CX, X) のホモロジー完全列で CX が可縮より、

$$\partial : H_{n+1}(CX, X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X)$$

は同型である。また、$i : X \longrightarrow CX$ がコファイブレーションであり、$CX/X \cong \Sigma X$ である。よって、

$$p_* : H_{n+1}(CX, X) \longrightarrow \widetilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$$

は同型である。よって、$\Sigma = p_* \circ \partial^{-1} : \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_{n+1}(\sum X)$ により定義する。連続写像との誘導との可換性に関しては、p_*, ∂ がそれぞれ可換だからである。 □

3 写像度

球面の被約ホモロジー群は簡単にわかるが、それを利用すると色々なことが導かれる。

定理 3.1. $\widetilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

証明 次元定理と懸垂定理から即座に従う。 □

系 3.2. $n, m \geqq 0$ において、$n \neq m$ ならば、$S^n \not\cong S^m$ である。

証明 $S^n \cong S^m$ とすれば、$\widetilde{H}_*(S^n) \cong \widetilde{H}_*(S^m)$ であるため、定理 3.1 に反する。 □

よって、この対偶を考えれば、$S^n \cong S^m$ ならば、$n = m$ である。これは球面に限らず、ユークリッド空間においても成り立つ。

定理 3.3. $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ ならば、$n = m$ である。

証明 $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ と仮定し、$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を同相写像とする。一点コンパクト化を取ることでこれは、同相 $g : S^n \longrightarrow S^m$ を誘導する。よって、定理 3.1 に従う。 □

命題 3.4. S^n は D^{n+1} のレトラクトではない。つまり、$1_{S^n} : S^n \longrightarrow S^n$ という恒等写像は、定義域を D^{n+1} に拡張できない。

証明 S^n は D^{n+1} のレトラクトとし、$r : D^{n+1} \longrightarrow S^n$ をレトラクションとする。$r \circ i = 1_{S^n}$ であるため、

$$r_* \circ i_* = 1 : \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(D^{n+1}) \longrightarrow \widetilde{H}_n(S^n)$$

となるが、$\widetilde{H}_n(D^{n+1}) = 0$ であるので上は 0 写像である。しかし、$\widetilde{H}_n(S^n) \neq 0$ なので矛盾。 □

定義 3.5. 連続写像 $f : S^n \longrightarrow S^n$ に対し、誘導される準同型 $f_* : \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(S^n)$ において、$\widetilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ であったので、その生成元を i_n とおく。このとき、$f_*(i_n) \in \widetilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ なので、$f_*(i_n) = m \cdot i_n$ とかける。これより、$\deg f = m$ と書き、f の写像度と呼ぶ。

補題 3.6. $p : S^n \longrightarrow S^n$ を定値写像とすると、$\deg p = 0$ である。

証明 $p(S^n) = \{e_0\} \subset S^n$ とおく。p は次の写像の合成である。

$$S^n \longrightarrow \{e_0\} \longrightarrow S^n$$

これより、

$$p_* : \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(\{e_0\}) \longrightarrow \widetilde{H}_n(S^n)$$

であり、$\widetilde{H}_n(\{e_0\}) = 0$ より、$p_* = 0$ なので、$\deg p = 0$ である。 □

補題 3.7. 恒等写像 $1_{S^n} : S^n \longrightarrow S^n$ に対し、$\deg 1_{S^n} = 1$ である。

証明 $(1_{S^n})_*(i_n) = 1_{\widetilde{H}_n(S^n)}(i_n) = i_n$ から導かれる。 □

補題 3.8. $f, g : S^n \longrightarrow S^n$ に対し、$\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$ である。

証明

$$(g \circ f)_*(i_n) = g_* \circ f_*(i_n) = g_*(\deg f \cdot i_n) = \deg f(g_*(i_n)) = (\deg f \cdot \deg g)i_n$$

よって、$\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$ である。 □

補題 3.9. $f, g :\ S^n \longrightarrow S^n$ に対し、$f \simeq g$ ならば、$\deg f = \deg g$ である。

証明 $f \simeq g$ ならば、$f_* = g_* : \widetilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \widetilde{H}_n(S^n)$ なので、$f_*(i_n) = g_*(i_n)$ である。 □