カップ積 (cup product) を考えたなら、その双対としてキャップ積 (cap product) というものがある。

Definition 0.0.1

$u \in S^{-m}(X)$, $c = \Sigma a_i \sigma_i \in S_n(X)$ に対し、$u \cap c \in S_{n-m}(X)$ を次で定義する。

$$u \cap c = \Sigma a_i < u, \sigma_i \circ L_m > \sigma_i \circ F_{n-m}$$

つまり、

$$\cap : S^{-m}(X) \times S_n(X) \longrightarrow S_{n-m}(X)$$

を定義することになる。これを u と c のキャップ積と呼ぶ。

Remmark 0.0.2

カップ積の定義より、以下のことが成り立つ。

1. $(u_1 + u_2) \cap c = u_1 \cap c + u_2 \cap c$
2. $u \cap (c_1 + c_2) = u \cap c_1 + u \cap c_2$
3. $r(u \cap c) = ru \cap c = u \cap rc \qquad (r \in \mathbf{Z})$

これより、$\cap : S^{-m}(X) \times S_n(X) \longrightarrow S_{n-m}(X)$ から、0 次準同型、

$$\cap : S^{\sharp}(X) \otimes S(X) \longrightarrow S(X)$$

が誘導される。

Proposition 0.0.3

$u \in S^{-n}(X)$, $v \in S^{-m}(X)$, $c \in S_{n+m}(X)$ に対し、

$$< u, v \cap c > = < u \cup v, c >$$

proof) $\qquad c = \Sigma a_i \sigma_i$ とする。

$$\begin{aligned} < u, v \cap c > &= < u, \Sigma a_i < v, \sigma_i \circ L_m > \sigma_i \circ F_{(n+m)-m} > \\ &= \Sigma a_i < v, \sigma_i \circ L_m > < u, \sigma_i \circ F_n > \\ &= \Sigma a_i < u \cup v, \sigma_i > \\ &= < u \cup v, \Sigma a_i \sigma_i > \\ &= < u \cup v, c > \end{aligned}$$

□

Lemma 0.0.4

$c \in S_n(X)$ で、${}^\forall \sigma \in S^{-n}(X)$ に対し、$<u, c>=0$ ならば、$c=0$

proof)　　$u(c)=0$ に対し、$c=0$ を示せばいい。結局、u が単射準同型ならいいのだが、その存在は群の双対だけでは保証されていない。しかし、$S_n(X)$ が自由加群であるところから示せる。

$$\varphi_\sigma : S_n(X) \longrightarrow \mathbf{Z} \qquad (\sigma \in K_n(X))$$

を、　$\varphi_\sigma(\nu)=\begin{cases} 1 & \sigma=\nu \\ 0 & \sigma \neq \nu \end{cases}$　で定義する。これより、$c=\Sigma a_i\sigma_i \in S_n(X)$ に対し、

$$\varphi_{\sigma_j}(\Sigma a_i\sigma_i)=a_j=0$$

これが、各 φ_σ において言えるのだから、各 $a_j=0$。よって、$c=0$

□

Lemma 0.0.5

$u, v \in S^\sharp(X)$, $c \in S(X)$ に対し、

$$u \cap (v \cap c) = (u \cup v) \cap c$$

proof)　　${}^\forall w \in S^\sharp(X)$ に対し、Lemma 0.0.4 より、

$$<w, u \cap (v \cap c)>=<w \cup u, v \cap c>=<w \cup (u \cup v), c>=<w, (u \cap v) \cap c>$$

$\therefore$ 　　$u \cap (v \cap c) = (u \cup v) \cap c$

□

Lemma 0.0.6

$c \in S(X)$ に対し、$1 \cap c = c$

proof)　　${}^\forall w \in S^\sharp(X)$ に対し、Lemma 0.0.4 より、

$$<w, 1 \cap c>=<w \cup 1, c>=<w, c>$$

$\therefore$ 　　$1 \cap c = c$

□

Lemma 0.0.7

$f : X \longrightarrow Y$, $u \in S^{\sharp}(Y)$, $c \in S(X)$ に対し、 $f_{\sharp}(f^{\sharp}(u) \cap c) = u \cap f_{\sharp}(c)$

proof) $\forall w \in S^{\sharp}(X)$ に対し、Lemma 0.0.4 より、

$$\begin{aligned} < w, f_{\sharp}(f^{\sharp}(u) \cap c > &=< f^{\sharp}(w), f_{\sharp}(u) \cap c > \\ &=< f^{\sharp}(w) \cup f^{\sharp}(u), c > \\ &=< f^{\sharp}(w \cup u), c > \\ &=< w \cup u, f_{\sharp}(c) >=< w, u \cap f_{\sharp}(c) > \end{aligned}$$

$\therefore \quad f_{\sharp}(f^{\sharp}(u) \cap c) = u \cap f_{\sharp}(c)$

□

Proposition 0.0.8

$\beta \in H^n(X)$, $\alpha \in H_n(X)$, $\varepsilon_* : H_0(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$ に対し、

$$\varepsilon_*(\beta \cup \alpha) =< \beta, \alpha >$$

proof) $\beta = [b]$, $\alpha = [a] = [\Sigma a_i \sigma_i]$ とおくと、

$$\begin{aligned} \varepsilon_*(\beta \cap \alpha) &= \varepsilon(b \cap a) \\ &= \varepsilon(\Sigma a_i < b, \sigma_i \circ L_n > \sigma_i \circ F_0) \\ &= \Sigma a_i < b, \sigma_i > \\ &=< b, a >=< \beta, \alpha > \end{aligned}$$

□

Lemma 0.0.9

$u \in S^{-m}(X)$, $c \in S_n(X)$ に対し、

$$\partial(u \cap c) = (-1)^{n-m} \delta(u) \cap c + u \cap \partial(c)$$

proof) $\quad {}^{\forall}w \in S^{n-m-1}(X)$ に対し、Lemma 0.0.4 より、

$$\begin{aligned}< w, u \cap \partial(c) > &= < w \cup u, \partial(c) > \\ &= < \delta(w \cup u), c > \\ &= < \delta(w) \cup u, c > + (-1)^{n-m-1} < w \cup \delta(u), c > \\ &= < \delta(w), u \cap c > + (-1)^{n-m-1} < w, \delta(u) \cap c > \\ &= < w, \partial(u \cap c) > + (-1)^{n-m-1} < w, \delta(u) \cap c >\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad < w, \partial(u \cap c) > = (-1)^{n-m} < w, \delta(u) \cap c > + < w, u \cap \partial(c) >$$

よって、$\partial(u \cap c) = (-1)^{n-m}\delta(u) \cap c + u \cap \partial(c)$

□

Lemma 0.0.10

位相空間 X に対し、

$$\cap : H^m(X) \times H_n(X) \longrightarrow H_{n-m}(X)$$

を、$\cap([u],[v]) = [u \cap v]$ で定義すれば、これは well definded な準同型。

proof) $\quad u \in \mathrm{Ker}\delta$, $c \in \mathrm{Ker}\partial$ ならば、Lemma 0.0.9 により、

$$\partial(u \cap v) = 0 \quad \text{であり、} \quad u \cap v \in \mathrm{Ker}\partial$$

また、$u \in \mathrm{Im}\partial$ とすると、${}^{\exists}v \in S^(-m+1) \quad s.t \quad \delta(v) = u$

これより、$v \cap c \in S^{-m+1}(X) \times S_n(X)$ に対し、$c \in \mathrm{Ker}\partial$ なので、

$$\partial(v \cap c) = \delta(v) \cap c + (-1)^{n-m+1} v \cap \partial(c) = u \cap c$$

これより、$u \cap c \in \mathrm{Im}\partial$。また、$c \in \mathrm{Im}\partial$ としても同様の結果を得る。これより、

$$\cup : H^m(X) \times H_n(X) \longrightarrow H_{n-m}(X)$$

は well definided な準同型である。

Definition 0.0.11

位相空間 X に対し、

$$\cap : H^m(X) \times H_n(X) \longrightarrow H_{n-m}(X)$$

において、$(\beta, \alpha) \in H^m(X) \otimes H_n(X)$ の像を$\beta \cup \alpha$ と書き、βとαの キャップ積と呼ぶ。また、0 次の準同型

$$\cap : H^*(X) \otimes H_*(X) \longrightarrow H_*(X)$$

が誘導される。（ただし、$H^m(X)$ の次数は $-m$ とする。）

これにより、(co)chain complex のキャップ積から、（コ）ホモロジー群のキャップ積が定義された。これについても以下の性質がある。

Remmark 0.0.12

$\alpha, \beta \in H^*(X)$, $\gamma \in H_*(X)$ に対し、 $\alpha \cap (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cap \gamma$

Remmark 0.0.13

$\alpha \in H_*$ に対し、 $1 \cap \alpha = \alpha$

Remmark 0.0.14

$f : X \longrightarrow Y$, $\alpha \in H^*(Y)$, $\beta \in H_*(X)$ に対し、$f_*(f^*(\alpha) \cap \beta) = \alpha \cap f_*(\beta)$