ホモロジー群とコホモロジー群は似ている。しかし、ここまで面倒なことを考えるからには何かしらの理由があったはずだ。ホモロジー群との違いの一つとして、位相空間のコホモロジー群は環構造を持つことが知られている。

Definition 0.0.1

次数付き加群 A が (単位元を持つ) 次数付き環であるとは、

$$a, b \in A \text{ に対し、} ab \in A$$

が定義され、次が成立する。

1. $a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$
2. $(a_1 + a_2)b = a_1 b + a_2 b$
3. $n(ab) = (na)b = a(nb) \qquad$ (ただし、$n \in \mathbf{Z}$)
4. $(ab)c = a(bc)$
5. $\deg(ab) = \deg a + \deg b$
6. ${}^{\exists}e \in A \qquad s.t \qquad ea = ae = e$

   e を単位元と呼び、1 で表す。さらに

7. $ab = (-1)^{\deg a \deg b} ba$

   が成り立つとき、A は可換であると言う。

Remmark 0.0.2

単位元を持つ次数付き環における単位元の次数は 0 である。

Definition 0.0.3

A, B : 単位元を持つ次数付きの環。次数 0 の準同型 f が次を満たすとき f を環の準同型 と呼ぶ。

1. $f(ab) = f(a)(b)$
2. $f(1_A) = 1_B$

Definition 0.0.4

C : 次数つき加群に対し、

$$<,>: C^\sharp \times C \longrightarrow \mathbf{Z}$$

を、$< u, c >= \begin{cases} u(c) & \deg u = \deg c \\ 0 & \deg u \neq \deg c \end{cases}$

Proposition 0.0.5

C, D : 次数つき加群

$$f : C \longrightarrow D$$

を次数 d の準同型とする。このとき、

$$< f^\sharp(v), c >=< v, f(c) > \qquad (v \in D^\sharp, c \in C)$$

proof) $\deg v \neq \deg c + d$ のとき、

$$< f^\sharp(v), c >= 0 =< v, f(c) >$$

$\deg v = \deg c + d$ のとき、

$$< f^\sharp(v), c >= (f^\sharp(v))(c) = v \circ f(c) = v(f(c)) =< v, f(c) >$$

□

Proposition 0.0.6

C : chain complex に対し、

$$< \partial^\sharp(u), c >=< u, \partial(c) >$$

proof) $\deg c \neq \deg u + 1$ のとき、

$$< \partial^\sharp(u), c >= 0 =< u, \partial(c) >$$

また、$\deg c = \deg u + 1$ のとき、

$$< \partial^\sharp(u), c >= (\partial^\sharp(u))(c) = u \circ \partial(c) = u(\partial(c)) =< u, \partial(c) >$$

□

さて、では実際に位相空間のコホモロジー群が次数付き環構造を持つことを示そう。しかし、その前に位相空間の特異 cochain complex の環構造を考えよう。前提として、特異 chain complex で考えた face の作用素

$$s_m^n : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$$

を思い起こさなくてはならない。

Definition 0.0.7

位相空間 X に対し、

$$u \in S_n^\sharp(X)\ ,\ v \in S_m^\sharp(X) \text{ とする。このとき、} u \cup v \in S_{n+m}^\sharp(X) \text{ を、}$$

$$u \cup v(\sigma) =< u, \sigma \circ F_n >< v, \sigma \circ L_m >$$

と定義する。

ただし、$F_n = s_{n+m}^{n+m} \circ s_{n+m-1}^{n+m-1} \circ \cdots \circ s_{n+1}^{n+1}$, $L_m = s_{n-1}^{n+m} \circ s_{n-2}^{n+m-1} \circ \cdots \circ s_0^{m+1}$

このとき、$u \cup v$ を u と v の cup 積と呼ぶ。

（実質的には、$u \cup v(\sigma) = u(\sigma \circ F_n) \times v(\sigma \circ L_m)$　である。）

Proposition 0.0.8

cup 積により、$S^\sharp(X)$ は単位元を持つ次数付き環である。

proof)　　まず単位元を見つける。$1 \in S_0^\sharp(X)$ は、

$$1 : S_0(X) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

であるため、$1(\sigma) = 1$ で定義すれば、これが単位元となる。これを単位コサイクルと呼ぶこともある。また、これまた面倒くさいのだが、他の条件も確かめてみようと思ったのだが、本当に面倒になったので確かめて欲しい。

□

Remmark 0.0.9

位相空間 X に対し、次数 0 の準同型

$$\cup : S^\sharp(X) \otimes S^\sharp(X) \longrightarrow S^\sharp(X)$$

が $\cup(a \otimes b) = a \cup b$ で定義できる。

Proposition 0.0.10

X, Y: 位相空間、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$f^\sharp : S^\sharp(Y) \longrightarrow S^\sharp(X)$$

は単位元を持つ環の準同型である。

proof) $f^\sharp(1) = 1$ は良いだろう。$u, v \in S^\sharp(Y)$ に対し、

$$\begin{aligned} f^\sharp(u \cup v)(\sigma) &= (u \cup v)(f(\sigma)) \\ &=< u, f_\sharp(\sigma \circ F) >< v, f_\sharp(\sigma \circ L) > \qquad \text{Prop 0.0.5 より、} \\ &=< f^\sharp(u), \sigma \circ F >< f^\sharp(v), \sigma \circ L > \\ &= (f^\sharp(u) \cup f^\sharp(v))(\sigma) \end{aligned}$$

これより、$f^\sharp : S^\sharp(Y) \longrightarrow S^\sharp(X)$ は環の準同型である。

□

Proposition 0.0.11 （コバウンダリー公式）

$u \in S^\sharp_n, v \in S^\sharp_m$ に対し、

$$\delta(u \cup v) = \delta(u) \cup v + (-1)^n u \cup \delta(v)$$

proof) $\sigma \in S_{n+m+1}(X)$ に対し、

$$
\begin{aligned}
(\delta(u) \cup v)(\sigma) &= \delta(u)(\sigma \circ F_{n+1}) \times v(\sigma \circ L_m) \\
&= u(\partial(\sigma \circ F_{n+1})) \times v(\sigma \circ L_m) \\
&= u(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j \sigma \circ F_{n+1} \circ s_j^{n+1}) \times v(\sigma \circ L_m) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j u(\sigma \circ F_{n+1} \circ s_j^{n+1}))v(\sigma \circ L_m) \\
&\qquad + (-1)^{(n+1)} u(\sigma \circ F_{n+1} \circ s_{n+1}^{n+1}) v(\sigma \circ L_m) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j u(\sigma \circ s_j^{n+m+1} \circ F_n) v(\sigma \circ L_m) \\
&\qquad + (-1)^{(n+1)} u(\sigma \circ F_n) v(\sigma \circ L_m)
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
(-1)^n(u \cup \delta(v))(\sigma) &= (-1)^n u(\sigma \circ F_n) \times \delta(v)(\sigma \circ L_{m+1}) \\
&= (-1)^n u(\sigma \circ F_n) \times v(\partial(\sigma \circ L_{m+1})) \\
&= \sum_{j=0}^{m+1}(-1)^j(-1)^n u(\sigma \circ F_n) \times v(\sigma \circ L_{m+1} \circ s_j^{m+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{n+j} u(\sigma \circ F_n) v(\sigma \circ L_{m+1} \circ s_j^{m+1}) \\
&\qquad + (-1)^n u(\sigma \circ F_n) v(\sigma \circ L_{m+1} \circ s_0^{m+1}) \\
&= \sum_{j=n+1}^{n+m+1}(-1)^j u(\sigma \circ F_n) v(\sigma \circ L_{m+1} \circ s_{j-n-1}^{m+1}) \\
&\qquad + (-1)^n u(\sigma \circ F_n) v(\sigma \circ L_m) \\
&= \sum_{j=n+1}^{n+m+1}(-1)^j u(\sigma \circ F_n) v(\sigma \circ s_j^{n+m+1} \circ L_m) \\
&\qquad + (-1)^n u(\sigma \circ F_n) v(\sigma \circ L_m)
\end{aligned}
$$

これより、

$$
\begin{aligned}
&(\delta(u) \cup v + (-1)^n u \cup \delta(v))(\sigma) \\
&= \sum_{j=0}^{n+m+1} (-1)^j u(\sigma \circ s_j^{n+m+1} \circ F_n) \times v(\sigma \circ s_j^{n+m+1} \circ L_m) \\
&= \sum_{j=0}^{n+m+1} (-1)^j (u \cup v)(\sigma \circ s_j^{n+m+1}) \\
&= (u \cup v)(\sum_{j=0}^{n+m+1} (-1)^j \sigma \circ s_j^{n+m+1}) \\
&= (u \cup v)(\partial(\sigma)) \\
&= \delta(u \cup v)(\sigma)
\end{aligned}
$$

であるので、

$$\delta(u \cup v) = \delta(u) \cup v + (-1)^n u \cup \delta(v)$$

□

Definition 0.0.12

位相空間 X で、

$$[u], [v] \in H^*(X) \text{ に対し、} [u] \cup [v] = [u \cup v]$$

と定義し、これを cohomology のカップ積と呼ぶ。

Lemma 0.0.13

位相空間 X において、カップ積

$$\cup : H^*(X) \times H^*(X) \longrightarrow H^*(X)$$

は積をなす。

proof)　　$[u] = [u']$, $[v] = [v'] \in H^*(X)$ に対し、$[u \cup v] = [u' \cup v']$ を示せば十分である。それ以外の積の性質は、$S^*(X)$ で示したことから直ちに示される。

$$u - u' \in \mathrm{Im}\delta \ , \ v - v' \in \mathrm{Im}\delta$$

である。これより、

$$^{\exists}x, y \in S^*(X) \qquad s.t \qquad \delta(x) = u - u' \ , \ \delta(y) = v - v'$$

ここで、$x \cup v$, $u' \cup y \in S^*(X)$ に対し、

$$\delta(x \cup v) = \delta(x) \cup v + (-1)^n x \cup \delta(v) = (u - u') \cup v = u \cup v - u' \cup v$$

である。さらに、

$$\delta(u' \cup y) = \delta(u') \cup y + (-1)^m u' \cup \delta(y) = (-1)^m u' \cup (v - v') = (-1)^m (u' \cup v - u' \cup v')$$

であるので、これより、$x \cup v + (-1)^m (u' \cup y) \in S^*(X)$ に対し、

$$\delta(x \cup v + (-1)^m (u' \cup y)) = u \cup v - u' \cup v'$$

よって、$[u \cup v] = [u' \cup v']$

$\square$

これより、$H^*(X)$ は単位元を持つ次数付きの環である。この意味を含めて、$H^*(X)$ をコホモロジー環と呼ぶ。

Remmark 0.0.14

位相空間 X において、次数 0 の準同型

$$\cup : H^*(X) \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*(X)$$

が、$\cup(\alpha \otimes \beta) = \alpha \cup \beta$ により定義できる。

Remmark 0.0.15

位相空間 X, Y と連続写像、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$f^* : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$$

は単位元を保つ次数付き環の準同型である。

実は $H^*(X)$ は可換環なのである。

Definition 0.0.16

$\nu_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$ を、

$$\nu_n(e_i) = e_{n-i} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

で定義する。また、0 準同型、$N : S(X) \longrightarrow S(X)$ を、

$$N(\sigma) = (-1)^{n(n+1)/2} \sigma \circ \nu_n$$

で定義する。

Lemma 0.0.17

$$N : S(X) \longrightarrow S(X)$$

は chain map

proof)　　確かめてみれば簡単なので省くが、$\nu_n \circ s_j^n = s_{n-j}^n \circ \nu_{n-1}$ である。

$$\begin{aligned}
\partial \circ N(\sigma) &= (-1)^{n(n+1)/2} \partial(\sigma \circ \nu_n) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (-1)^{n(n+1)/2} \sigma \circ \nu_n \circ s_j^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (-1)^{n(n+1)/2} \sigma \circ s_{n-j}^n \circ \nu_{n-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} (-1)^{n(n+1)/2} \sigma \circ s_j^n \circ \nu_{n-1}
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
N \circ \partial(\sigma) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j N(\sigma \circ s_j^n) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (-1)^{n(n-1)/2} \sigma \circ s_j^n \circ \nu_{n-1}
\end{aligned}$$

ここで、

$$(n-j) + \frac{n(n+1)}{2} - (j + \frac{n(n-1)}{2}) = 2n - 2j = 2(n-j)$$

なので、$\partial \circ N = N \circ \partial$

$\square$

Lemma 0.0.18

$N^\sharp : S^\sharp \longrightarrow S^\sharp$ において、$u \in S^\sharp_n(X)$, $w \in S^\sharp_m(X)$ とすると、

$$N^\sharp(u \cup w) = N^\sharp u \cup (-1)^{nm} N^\sharp(w)$$

proof)　　$(n+m)(n+m+1) = n(n+1) + m(m+1) + 2nm$ を確認しておく。

$$\begin{aligned}
< N^\sharp(u \cup w), \sigma > &= < u \cup w, N(\sigma) > \\
&= (-1)^{(n+m)(n+m+1)/2} < u \cup w, \sigma \circ \nu_{n+m} > \\
&= (-1)^{(n+m)(n+m+1)/2} < u, \sigma \circ \nu_{n+m} \circ F_n >< w, \sigma \circ \nu_{n+m} \circ L_m > \\
&= (-1)^{(n+m)(n+m+1)/2} < u, \sigma \circ L_n \circ \nu_n >< w, \sigma \circ F_m \circ \nu_m > \\
&= (-1)^{nm} < u, (-1)^{n(n+1)/2} \sigma \circ L_n \circ \nu_n >< w, \sigma \circ F_m \circ \nu_m > \\
&= (-1)^{nm} < w, N(\sigma \circ F_m) >< u, N(\sigma \circ L_n) > \\
&= (-1)^{nm} < N^\sharp(w), \sigma \circ F_m >< N^\sharp(u), \sigma \circ L_n > \\
&= (-1)^{nm} < N^\sharp(w) \cup N^\sharp(u), \sigma >
\end{aligned}$$

これより、$N^\sharp(u \cup w) = N^\sharp u \cup (-1)^{nm} N^\sharp(w)$

□

Definition 0.0.19

$$[e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}] : \Delta^n \longrightarrow \Delta^m \quad (0 \leqq i_j \leqq m)$$

位相空間 X、$\sigma \in S_m(X)$ に対し、

$C(\sigma)_n$を、$\sigma \circ [e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}]$ の元からなる集合で生成される自由加群

Lemma 0.0.20

$C(\sigma)_n$ は、$S_n(X)$ の部分複体

proof)　　$[e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}] \circ s^n_j = [e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_{j-1}}, e_{i_{j+1}}, \cdots, e_{i_n}]$

これより、$\partial(C(\sigma)_n) \subset C(\sigma)_{n-1}$

よって、$C(\sigma)_n$ は、$S_n(X)$ の部分複体

□

Lemma 0.0.21

$\sigma \in S_n(X)$ に対し、$N(\sigma) \in C(\sigma)_n$

proof)

$$\begin{aligned} N(\sigma) &= (-1)^{n(n+1)/2}\sigma \circ \nu_n \\ &= (-1)^{n(n+1)/2}\sigma \circ [n, n-1, \cdots, 1, 0] \in C(\sigma)_n \end{aligned}$$

□

Lemma 0.0.22

$$H_n(C(\sigma)) = 0 \qquad (n \geqq 1)$$

proof)　次数 1 の準同型　$H : C(\sigma) \longrightarrow C(\sigma)$　を

$$H(\sigma \circ [e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}]) = \sigma \circ [0, e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}]$$

で定義する。

$$\begin{aligned} &\partial \circ H(\sigma \circ [e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}]) + H \circ \partial(\sigma \circ [e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}]) \\ &= \partial(\sigma \circ [0, e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}]) + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j H(\sigma \circ [e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{j-1}, e_{j+1}, \cdots, e_{i_n}]) \\ &= \sigma \circ [0, e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}] \end{aligned}$$

これより、${}^\forall c \in C(\sigma)_n$ に対し、

$$\partial \circ H(c) + H \circ \partial(c) = c$$

よって、$[x] \in H_n(C(\sigma)_n)$ に対し、$\partial(x) = 0$ であるので、

$$x = \partial \circ H(x) \in \mathrm{Im}\partial \qquad \text{これより、}[x] = 0$$

□

Proposition 0.0.23

$$N \simeq 1 : S(X) \longrightarrow S(X)$$

proof)　次数 1 の準同型　$G = \{G_n\} : S(X) \longrightarrow S(X)$ を次のように定義する。

$$G_n = 0 \quad (n \leqq 0)$$

で、これ以上は m に関する帰納法で定義する。各 $n < m (m \geqq 1)$ に対し、

1. $\partial_{n+1} \circ G_n + G_{n-1} \circ \partial_n = N_n - 1$
2. $G_n(\sigma) \in C(\sigma)_{n+1} \qquad (\sigma \in S_n(X))$

を満たす G_n が定義できたとする。まず、$m = 1$ の時を確認する。$m = 1$ のとき、$n \leqq 0$ であるから、$G_n = 0$ であり、$N_0 = 1$ であるから、上記の二つの条件を満たす。

$\sigma \in S_m(X)$ に対し、

$$G_{m-1} \circ \partial_m(\sigma) - N_m(\sigma) + \sigma \in S_m(X)$$

を考える。2)、Lemma 0.0.21、$\sigma = \sigma \circ [0, 1, \cdots m]$ を考慮すれば、

$$G_{m-1} \circ \partial_m(\sigma) - N_m(\sigma) + \sigma \in C(\sigma)_m$$

さらに、

$$\begin{aligned} &\partial_m(G_{m-1} \circ \partial_m(\sigma) - N_m(\sigma) + \sigma) \\ =&\partial_m \circ G_{m-1} \circ \partial_m(\sigma) - \partial_m \circ N_m(\sigma) + \partial_m(\sigma) \qquad \text{1) より、} \\ =&0 \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad G_{m-1} \circ \partial_m(\sigma) - N_m(\sigma) + \sigma \in \mathrm{Ker}\partial_m$$

ここで、Lemma　0.0.22 より、$H_m(C(\sigma)) = 0$。つまり、$\mathrm{Ker}\partial_m = \mathrm{Im}\partial_{m+1}$ だから、

$$^{\exists}\nu \in C(\sigma)_{m+1} \qquad s.t \qquad \partial_{m+1}(\nu) = G_{m-1} \circ \partial_m(\sigma) - N_m(\sigma) + \sigma$$

これより、$G_m(\sigma) = \nu$ で定義すれば、2 つの条件を満たす準同型が定義でき、$N \overset{G}{\simeq} 1$
□

Corollary 0.0.24

$H^*(X)$ は次数付きの可換環である。

proof)　　Prop　0.0.23 より、

$$N^* = 1 : H^*(X) \longrightarrow H^*(X)$$

であり、これと Lemma　0.0.18 より導かれる。

$\square$