0.1 Geometric Realization

Definition 0.1.1

X を simplicial set とする。$\varphi : [m] \longrightarrow [n]$ に対し、$\varphi_* : X_n \longrightarrow X_m$、$\varphi^* : \Delta^m \longrightarrow \Delta^n$ が誘導される（Δ^* を cosimplicial space と考えている）。

$$|X| = \left(\coprod_{n \geqq 0} \Delta^n \times X_n \right) \Big/ \sim$$

で定義する。ただし、$(u,x) \in \Delta^n \times X_n$, $(v,y) \in \Delta^m \times X_m$ に対し、

関係 $(u,x) \sim (v,y)$ は $\varphi : [n] \longrightarrow [m]$ が存在し、$x = \varphi^*(y)$, $v = \varphi_*(u)$ となることで定義する。

この $|X|$ を simplicial set X の幾何学的実現（geometric realization）と呼ぶ。(u,x) を代表元とする $|X|$ の元を $|u,x|$ と表す。

Remark 0.1.2

Simplicial map $f : X \longrightarrow Y$ に対し、$|f| : |X| \longrightarrow |Y|$ を、$|f|(|u,x|) = |u, f(x)|$、$(u,x) \in \Delta^n \times X_n$ と定義すれば、これは well defined な連続写像になる。よって、

$$| - | : SSets \longrightarrow Space$$

は functor となる。

Definition 0.1.3

Simplicial set X の n 単体 $u \in X_n$ に対し、単射でない $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$ と、$v \in X_m$ が存在し $u = \varphi^*(v)$ と表されるとき、u は退化しているといい、退化している n 単体のなす X_n の部分空間を sX_{n-1} と書く。

Δ^n に対しては $\partial\Delta^n$ の元を退化しているとよぶ。

また $(u,x) \in \Delta^n \times X_n$ に対し、u, x が共に非退化のとき (u,x) を非退化と呼び、それ以外の元を退化していると呼ぶ。

Lemma 0.1.4

任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$ は、全射である $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}_\Delta([n],[p])$ と単射である $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}_\Delta([p],[m])$ によって $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ と一意に分解できる。

proof)　$\varphi : [n] \longrightarrow [m]$ に対し、$\mathrm{Im}\varphi$ の濃度を p とする。これにより、題意を満たす全射 $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}_\Delta([n],[p])$ と単射 $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}_\Delta([p],[m])$ で $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ に一意に分解できる。

□

Lemma 0.1.5

Simplicial set X に対し、任意の $u \in X_n$ は非退化単体 $v \in X_m$ と全射である $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$ が一意に存在し $u = \varphi^*(v)$ とあらわせる。

proof)　　$n = 0$ のとき $u \in X_0$ は非退化である。なぜなら $u \in X_0$ が退化しているとすると、単射でない $\alpha \in \mathrm{Hom}([0],[m])$ が存在するはずだが、$[0] = \{0\}$ なので α は単射にしかならないので矛盾である。

あとは帰納的に示す。今、$m < n$ のすべての m に対し、題意が成り立つとする。

$u \in X_n$ が非退化なら問題ない。u が退化しているとすると、$v \in X_m$ と単射でない $\varphi \in \mathrm{Hom}([n],[m])$ が存在し、$\varphi^*(v) = u$ と表せる。Lemma　0.1.4 により全射 $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}([n],[p])$ と単射 $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}([p],[m])$ により $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ となる。

$$\varphi^*(v) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)^*(v) = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*(v)$$

$\varphi_2^*(v) \in X_p$ で $p < n$ なので仮定より 非退化な元 $v' \in X_{p'}$ と全射$\chi \in \mathrm{Hom}([p],[p'])$ が存在し、$\chi^*(v') = \varphi_2^*(v)$ と表せる。よって、

$$u = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*(v) = \varphi_1^* \circ \chi^*(v') = (\chi \circ \varphi_1)^*(v')$$

$\chi \circ \varphi_1$ が全射なので成立する。

次に一意性を示す。非退化な元 $v \in X_m$, $v' \in X_{m'}$ および、全射 $\varphi \in \mathrm{Hom}([n],[m])$, $\varphi' \in \mathrm{hom}([n],[m'])$ で $u = \varphi^*(v) = \varphi^*(v')$ で表されるとする。$\varphi : [n] \longrightarrow [m]$ は全射なので、$\chi : [m] \longrightarrow [n]$ が存在し、$\varphi \circ \chi = 1_{[m]}$ となる。従って、$\varphi = \varphi'$ なら、

$$v = \chi^* \circ \varphi^*(v) = \chi^* \circ \varphi'^*(v') = \chi^* \circ \varphi^*(v') = v'$$

である。$\varphi \neq \varphi'$ とすれば、$m \leqq m'$ としてよく、

$$\varphi' \circ \chi : [m] \longrightarrow [m']$$

は単射ではない。このとき、

$$v = \chi^* \circ \varphi^*(v) = \chi^* \circ \varphi'^*(v)$$

なので v は非退化になってしまうので矛盾する。よって一意性も確認できる。

□

Lemma 0.1.6

$t \in \Delta^n$ に対し、非退化な元 $s \in \Delta^m$ と単射 $\chi \in \mathrm{Hom}([m],[n])$ が一意に存在し、$t = \chi_*(s)$ と表される。

proof)　　Lemma　0.1.5 と同じような考えであるが、Δ^n は CW 複体であるのでそれよりは安易である。任意の点はある胞体、つまり $\mathrm{Int}\Delta^m$ に含まれるので、埋め込む写像を考えれば題意は示される。

□

Definition 0.1.7

$\overline{X} = \coprod_{n \geqq 0} \Delta^n \times X_n$ とする。Lemma 0.1.5、0.1.6 により、

$$\lambda : \overline{X} \longrightarrow \overline{X} \quad , \quad \rho : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$$

を次のように定義する。$(t,u) \in \Delta^n \times X_n$ に対し、$v \in X_m$ と $\varphi \in \mathrm{Hom}([n],[m])$ が一意に存在し、$\varphi^*(v) = u$ と表せる。

$$\lambda(t,u) = (\varphi_*(t), v)$$

また、$s \in \Delta^{m'}$ と $\chi \in \mathrm{Hom}([m'],[n])$ が一意に存在し $\chi_*(s) = t$ と表せる。

$$\rho(t,u) = (s, \chi^*(u))$$

で定義する。

Corollary 0.1.8

Simplicial set X に対し、$|X|$ の任意の元は非退化な元 $(s,v) \in \Delta^n \times X_n$ によって一意に表される。

proof)　　任意の $(t,u) \in \Delta^n \times X_n$ に対し、非退化な元 $(s,v) \in \Delta^m \times X_m$ で $(t,u) \sim (s,v)$ が一意に存在することを示せばよい。

$$\lambda \circ \rho(t,u) = \lambda(s, \chi^*(u)) = (\varphi_*(s), v) \sim (s, \varphi^*(v)) = (s, \chi^*(u)) \sim (\chi_*(s), u) = (t,u)$$

また $\lambda \circ \rho(t,u) = (\varphi_*(s), v)$ で v, s は非退化あり、$\varphi_*(s)$ も非退化である。さらに、$(t, f^*(u)) \sim (f_*(t), u)$ に対しては、

$$\lambda \circ \rho(t, f^*(u)) = \lambda(s, \varphi^* \circ f^*(u)) = \lambda(s, (f \circ \varphi)^*(u)) = ((f \circ \varphi)_*(s), u) = (f_*(t), u)$$

であり、また、

$$\lambda \circ \rho(f_*(t), u) = \lambda(s, \chi^*(u)) = (\chi_*(s), u) = (f_*(t), u)$$

となるので、$\lambda \circ \rho(t, f^*(u)) = \lambda \circ \rho(f_*(t), u)$ であり一意性も示される。

□

Definition 0.1.9

Simplicial set X に対し、

$$p_n : \Delta^n \times X_n \hookrightarrow \coprod \Delta^n \times X_n \longrightarrow |X|$$

を自然な射影とする。ここで、

$$\coprod_{m \leqq n} p_m : \coprod_{m \leqq n} \Delta^n \times X_n \longrightarrow |X|$$

の像を $F_n|X|$ とおく。これにより、

$$F_0|X| \subset \cdots \subset F_n|X| \subset F_{n+1}|X| \subset$$

の空間列が構成でき、$|X| \cong \bigcup_{n \geqq 0} F_n|X|$ となる。

Remark 0.1.10

$\Delta^n \times X_n$ の退化の元のなす部分空間を B_n とおくと、

$$B_n = \partial\Delta^n \times X_n \cup \Delta^n \times sX_{n-1}$$

であるが、$p_n : \Delta^n \times X_n \longrightarrow |X|$ に対し、$p_n(B_n) \subset F_{n-1}|X|$ である。

proof)　　$(t,u) \in \partial\Delta^n \times X_n \cup \Delta^n \times sX_{n-1}$ とする。$t \in \partial\Delta^n$ とすると、$\chi \in \mathrm{Hom}([n-1],[n])$ が存在して $\chi_*(s) = t$ と表せる。よって、

$$|t,u| = |s,\chi^*(u)| \in F_{n-1}|X|$$

また、$u \in sX_{n-1}$ とすると、単射でない $\varphi \in \mathrm{Hom}([n],[m])$ が存在し、$\varphi^*(v) = u$ であるので、$m < n$ としてよい。

$$|t,u| = |\varphi_*(t), v| \in F_{n-1}|X|$$

である。

□

直感的に言えば B_n は貼り付けられる糊代であり、$F_{n-1}|X|$ に埋められていく。

Theorem 0.1.11

任意の Simplicial set X に対し、$|X|$ は CW 複体であり、その n-cell は X_n の非退化元と一対一対応をもつ。

proof)　　単体集合なので各 X_n が離散空間。ということは X_n は 0-cell のみからなる CW 複体である。

$F_0|X| = \Delta^0 \times X_0$ で CW 複体であり、これが $|X|$ の 0-skelton である。

$$F_n|X| - F_{n-1}|X| \cong (X_n - sX_{n-1}) \times \mathrm{Int}\Delta^n \cong \coprod_{\lambda \in X_n - sX_{n-1}} \mathrm{Int}\Delta^n_\lambda$$

というわけであり、

$$F_n|X| \cong F_{n-1}|X| \cup_{p_n} \coprod \Delta^n_\lambda$$

で CW 複体で、これが $|X|$ の n-skelton である。よって $|X| \cong \bigcup F_n|X|$ であるため X は CW 複体である。

□

Example 0.1.12

位相空間 X に対し、S_*X は Simplicial set なので $|S_*X|$ は CW 複体である。

Definition 0.1.13

位相空間 X に対し、$\gamma : |S_*X| \longrightarrow X$ を $|u,f| \in |S_*X|$ に対し、$\gamma|u,f| = f(u)$ で定義する。

Lemma 0.1.14

$\gamma : |S_*X| \longrightarrow X$ は well definded で natural map である。

proof)　　$(u, \varphi^*(f)) \sim (\varphi_*(u), f)$ なので、

$$\varphi^*(f)(u) = (f \circ \varphi_*)(u) = f \circ \varphi_*(u)$$

となり、$\gamma|u, \varphi^*(f)| = \gamma|\varphi_*(u), f|$ なので well definded である。さらに、連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\gamma \circ |S_*f|(|u, \sigma|) = \gamma|u, f \circ \sigma| = f \circ \sigma(u) = f(\sigma(u)) = f \circ \gamma|u, \sigma|$$

であるので、

$$\begin{tikzcd} {|S_*X|} \arrow[r, "|S_*f|"] \arrow[d, "\gamma"'] & {|S_*Y|} \arrow[d, "\gamma"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

は可換になる。

□

Theorem 0.1.15

$\gamma : |S_*X| \longrightarrow X$ は weak equivalence である。

proof)　　$\gamma_* : \pi_*(|S_*X|) \longrightarrow \pi_*(X)$ が全単射を示す。まず全射を示す。

$[\alpha] \in \pi_n(X)$ をとると、$\alpha : (S^n, *) \longrightarrow (X, *)$ であるが、

$$\alpha : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow (X, *)$$

と考えられる。

$$\tilde{\alpha} : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \longrightarrow (|S_*X|, |1, *|)$$

を、$\tilde{\alpha}(t) = |t, \alpha|$ で定義する。ただし、$(1, *) \in \Delta^0 \times S_0(X)$ である。$* : \Delta^0 \longrightarrow X$ は $*$ への定値写像と見ている。

$t \in \partial\Delta^n$ に対し、$\alpha(t) = *$ であるため、$s \in \Delta^{n-1}$ が存在し、$|t, \alpha| = |s, *|$ である。また、$\varphi \in \hom([n-1], [0])$ に対し、$1 = \varphi_*(s)$, $* = \varphi^*(*)$ となるため、$|s, *| = |1, *|$ であるので $\tilde{\alpha}$ は well-defineded である。これより、$\gamma \circ \tilde{\alpha}(t) = \gamma|t, \alpha| = \alpha(t)$ なので、$\gamma_*[\tilde{\alpha}] = [\alpha]$ であるので全射である。あとは単射を示す。

$[f] \in \pi_n(|S_*X|, |1, *|)$ に対し、$\gamma_*[f] = 0$ とする。$f : S^n \longrightarrow |S_*X|$ と考えれば、胞体近似定理から、これは celluer map と考えられ、さらに、S^n が simplicial complex であるから、その細分を考えることにより、$f \simeq f'$ で、$f' \circ e : S^n \longrightarrow |S_*X|$ が $|S_*X|$ の cell となる f' が存在する。ただし、$e : S^n \longrightarrow S^n$ は S^n の細分された n-cell である。$\gamma \circ f \simeq *$ なので、

$$H : D^{n+1} \longrightarrow X$$

が存在し、$H_{|S^n} = \gamma \circ f'$ となる。つまり、

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\text{inclusion}"'] & {|S_*X|} \arrow[d, "\gamma"] \\ D^{n+1} \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

が可換になる。ここで、やはり D^{n+1} を十分細かく細分すれば、それぞれで lift が構成できるため、それを繋ぎ合わせて、diagram を可換にする

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\text{inclusion}"'] & {|S_*X|} \arrow[d, "\gamma"] \\ D^{n+1} \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

が構成できる。これより、$f \simeq f' \overset{\tilde{H}}{\simeq} *$ である。

$\square$

Definition 0.1.16

Simplcial set X に対し、$\eta : X \longrightarrow S_*|X|$ を、$x \in X_n$ に対し、$\eta(x) : \Delta^n \longrightarrow |X|$ を、$\eta(x)(u) = (u, x)$ で定義する。

Lemma 0.1.17

$\eta : X \longrightarrow S_*X$ は simplicial map で natural である。

proof)　　degeneracy と face について可換性を見てみる。$x \in X_n$ に対し、

$$\eta(d_j x)(u) = |u, d_j x| = |d^j u, x| = \eta(x)(d^j u) = \eta(x) \circ d^j(u) = d_j(\eta(x))(u)$$

であるので、face も同様である。また、$f : X \longrightarrow Y$ を simplicial map としたとき、$x \in X_n, u \in \Delta^n$ に対し、

$$\eta \circ f(x)(u) = |u, f(x)| = |f|(|u, x|) = |f|(\eta(x)(u)) = S_*|f|(\eta(x))(u)$$

であるので、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ S_*|X| \arrow[r, "S_*|f|"'] & S_*|Y| \end{tikzcd}$$

は可換である。

$\square$

Theorem 0.1.18

任意の simplicial set X に対し、$|\eta| : |X| \longrightarrow |S_*|X||$ は weak eqivalence である。

proof)　　$\gamma : |S_*|X|| \longrightarrow |X|$ を考えると、$|u, x| \in |X|$ に対し、

$$\gamma|\eta|(|u, x|) = \gamma|u, \gamma(x)| = \gamma(x)(u) = |u, x|$$

なので、$\gamma \circ |\eta| = 1 : |X| \longrightarrow |X|$ であり、

$$\gamma_* \circ |\eta|_* = 1 : \pi_*(|X|) \longrightarrow \pi_*(|X|)$$

である。ここで、Theorem 0.1.15 により、γ_* は isomorphism なので、$|\eta|_*$ はその inverce となり、特に isomorphism である。

□

Corollary 0.1.19

$|-| : SSets \Longleftrightarrow Space : S_*$ は adjoint である。

proof)　　X_* を simplicial set、Y を空間とする。

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{SSets}(X_*, S_*Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Space}(|X_*|, Y)$$

$$\beta : \mathrm{Hom}_{Space}(|X_*|, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{SSets}(X_*, S_*Y)$$

をそれぞれ、$f : X_* \longrightarrow S_*Y$ に対し、$\alpha(f) = \gamma \circ |f|$。また、$g : |X_*| \longrightarrow Y$ に対し、$\beta(g) = S_*(g) \circ \eta$ とする。$x \in X_n$ に対し、

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \alpha(f))(x)(u) &= (\beta(\gamma \circ |f|))(x)(u) \\
&= (S_*(\gamma \circ |f|) \circ \eta(x))(u) \\
&= (\gamma \circ |f| \circ \eta(x))(u) \\
&= \gamma \circ |f|(|u, x|) \\
&= \gamma(|u, f(x)|) = f(x)(u)
\end{aligned}$$

であるので、$\beta \circ \alpha = 1$ である。逆に、

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \beta(g))|u, x| &= \alpha(S_*g \circ \eta)|u, x| \\
&= \gamma \circ |S_*g \circ \eta|(|u, x|) \\
&= \gamma|u, S_*g \circ \eta(x)| \\
&= \gamma|u, g \circ \eta(x)| \\
&= g \circ \eta(x)(u) = g|u, x|
\end{aligned}$$

なので、$\alpha \circ \beta = 1$ でもある。naturality は γ、η の naturality から導かれる。

□

Theorem 0.1.20

Simplicial set X, Y に対し、

$$\pi = |p_1| \times |p_2| : |X \times Y| \longrightarrow |X| \times |Y|$$

は同相となる。

proof) $\Delta^n = \{(a_1, \cdots a_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq 1\}$ と考えると、$r : \Delta^n \times \Delta^m \longrightarrow \Delta^{n+m}$ を次のように定める。$u \in \Delta^n$、$v \in \Delta^m$ としたとき、

$$u = (u_1, \cdots, u_n)\ ,\ v = (v_1, \cdots, v_m)$$

と表す。このとき、$\{u_i, v_j\}_{i,j}$ を小さい順に並べなおすと、

$$w = (w_1, \cdots w_{n+m}) \in \Delta^{n+m}$$

であるので、$r(u, v) = w$ と定義する。このとき、$\{w_k\}_k$ は $\{u_i, v_j\}_{i,j}$ を並べ替えたものなので、$S, T \subset \{0, 1, \cdots, n+m-1\}$ で、$k \in S$ ならば $w_k \in \{u_i\}_i$、$k \in T$ ならば $w_k \in \{v_j\}_j$ であり、$S \cup T = \{0, 1, \cdots, n+m-1\}, S \cap T = \phi$ を満たすような S, T が一意に存在する。このとき、$\sigma_S : [n+m] \longrightarrow [m]$ を $i \in S$ ならば、$\sigma_S(i) = \sigma_S(i+1)$ を満たす全射として定義する。これは Δ の morphism であることと、全射性から一意に定まる。同じくして、$\sigma_T : [n+m] \longrightarrow [n]$ を定義する。

$$(\sigma_S)_* : \Delta^{n+m} \longrightarrow \Delta^m$$

を考えると、$(a_0, \cdots, a_{n+m}) \in \Delta^{n+m}$ に対し、$i \in S$ の番号を cut する projection である。これより、$(\sigma_S)_* r(u, v) = v$、$(\sigma_T)_* r(u, v) = u$ である。

$$q : |X| \times |Y| \longrightarrow |X \times Y|$$

を以下のように定義する。$|u, x| \in |X|$、$|v, y| \in |Y|$、ただし、$(u, x) \in \Delta^n \times X_n$、$(v, y) \in \Delta^m \times X_m$ に対し、

$$q(|u, x|, |v, y|) = |r(u, v), \sigma_T^*(x), \sigma_S^*(y)|$$

ただし、$(r(u, v), \sigma_T^*(x), \sigma_S^*(y)) \in \Delta^{n+m} \times (X \times Y)_{n+m}$ である。このとき、

$$\begin{aligned}
\pi \circ q(|u, x|, |v, y|) &= \pi(|r(u, v), \sigma_T^*(x), \sigma_S^*(y)|) \\
&= (|r(u, v), \sigma_T^*(x)|, |r(u, v), \sigma_S^*(y)|) \\
&= (|(\sigma_T)_* r(u, v), x|, |(\sigma_S)_* r(u, v), y|) \\
&= (|u, x|, |v, y|)
\end{aligned}$$

逆に、$(u, x, y) \in \Delta^n \times (X \times Y)_n$ に対し、

$$q \circ \pi(|u, x, y|) = q(|u, x|, |u, y|) = |r(u, u), \sigma_T^*(x), \sigma_S^*(y)|$$

であるが、このとき、

$$r(u, u) = (u_0, u_0, u_1, u_1, \cdots, u_n, u_n) \in \Delta^{2n}$$

であるので、同じものが重複するためこれは degenerate であり、$s : [n] \longrightarrow [2n]$ が存在し（例えば $k \mapsto 2k$)、$r(u, u) = s_*(u)$ である。また、

$$\sigma_S \circ s = \sigma_T \circ s = 1 : [n] \longrightarrow [n]$$

であり、

$$q \circ \pi(|u,x,y|) = |s_*(u), \sigma_T^*(x), \sigma_S^*(y)| = |u, (\sigma_T \circ s)^*(x), (\sigma_S \circ s)^*(y)| = |u,x,y|$$

$\square$

Corollary 0.1.21

$|-| : SSet \longrightarrow Space$ は finite product を保つ。つまり、$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ という simplicial set の diagram に対して、

$$|X \times_Z Y| \cong |X| \times_{|Z|} |Y|$$

という natural homeomorphism が存在する。

proof)　　Theorem 0.1.20 における isomorphism

$$\pi : |X \times Y| \leftrightarrows |X| \times |Y| : q$$

の制限として、

$$\pi : |X \times_Z Y| \leftrightarrows |X| \times_{|Z|} |Y| : q$$

となることを示せばよい。π について見てみると、$|u,x,y| \in |X \times_Z Y|$ で、$(u,x,y) \in \Delta^n \times X_n \times_{Z_n} Y_n$ に対し、$\pi(u,x,y) = (|u,x|, |u,y|)$ であるが、$|f|(|u,x|) = |u,fx| = |u,gy| = |g|(|u,y|)$ であるから、$\pi(u,x,y) \in |X| \times_{|Z|} |Y|$ である。逆に、q について見てみると、$(|u,x|, |v,y|) \in |X| \times_{|Z|} |Y|$ に対し、$(u,x) \in \Delta^n \times X_n$ と $(v,y) \in \Delta^m \times Y_m$ とする。仮定より、$|u,fx| = |v,gy|$ in $|Z|$ なので、$\rho : [n] \longrightarrow [m]$ が存在し、$\rho^* gy = fx$, $\rho_* u = v$ である。

$$q(|u,x|, |v,y|) = |r(u,v), \sigma_T^*(x), \sigma_S^*(y)|$$

であったので、

$$f\sigma_T^* x = \sigma_T^* fx = \sigma_T^* \rho^* gy = g(\rho \circ \sigma_T)^*(y) = g\sigma_S^*(y)$$

となるのは、$\rho_* u = v$ による。

$\square$