特異ホモロジー群

ここでは位相空間 X からその情報を引き継いだ chain complex を作ることを目標にする。

1 特異ホモロジー群

定義 1.1. S を集合としたとき、形式的有限和を集めた集合を

$$\mathbb{Z}S = \{\sum a_i s_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, s_i \in S\}$$

と書く。これは係数の和を用いて、演算を定義することができ、アーベル群となる。これを S から生成された自由アーベル群と呼ぶ。ちなみに、$S = \phi$ の場合、$\mathbb{Z}S = \{0\}$ という単位元からのみなる群とする。また、写像 $f : S \longrightarrow T$ に対しては、準同型 $\mathbb{Z}f : \mathbb{Z}S \longrightarrow \mathbb{Z}T$ が、$\sum a_i s_i \mapsto \sum a_i f(s_i)$ により定義される。

注意 1.2. S を集合、G をアーベル群とする。このとき、写像 $S \longrightarrow G$ を定めることと、$\mathbb{Z}S \longrightarrow G$ を定めることは一対一対応がある。つまり、自由アーベル群からの準同型は、生成元の行き先のみで決定する。

証明 写像 $f : S \longrightarrow G$ があったとき、その拡張として、$\tilde{f} : \mathbb{Z}S \longrightarrow G$ が、$\tilde{f}(\sum a_i s_i) = \sum a_i f(s_i)$ によって定義され、逆に、$\mathbb{Z}S \longrightarrow G$ が与えられたとき、その制限により、写像 $S \longrightarrow G$ が得られる。この対応が一対一となる。 □

定義 1.3. X を位相空間としたとき、連続写像 $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ を特異 n-単体とよぶ。このとき、特異 n-単体全体の集合を $S_n(X)$ とおく。ところで、アフィン写像 $d^i_n : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ を、

$$d^i_n(e_k) = \begin{cases} e_k & 0 \leqq k \leqq i-1 \\ e_{k+1} & i \leqq k \leqq n \end{cases}$$

で定義する。このとき、

$$d^n_i = (d^i_n)^* : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

が、$d^n_i(\sigma) = \sigma \circ d^i_n$ により定義される。d^n_i を n 次元の i 番目の境界作用素とよぶ。

d^i_n, d^n_i は、n-次元を省略して、d^i や d_i と書くときもある。境界作用素で重要なのは、$d_i : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ と、$d_j : S_{n-1}(X) \longrightarrow S_{n-2}(X)$ を合成した、$d_j \circ d_i : S_n(X) \longrightarrow S_{n-2}(X)$ がどうなっているのかということである。これを見るためには、$d^i \circ d^j : \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^n$ がどうなっているかを調べるのがよい。

補題 1.4. $j < i$ のとき、$d^i \circ d^j = d^j \circ d^{i-1} : \Delta^{n-2} \longrightarrow \Delta^n$

証明 実際に $e_k \in \Delta^{n-2}$ を移してみればよい。さらに場合分けを考え、$0 \leqq k < j$ のとき、 $k < i-1$ であるから、

$$d^i \circ d^j(e_k) = d^i(e_k) = e_k = d^j \circ d^{i-1}(e_k)$$

また、$j \leqq k < i-1$ のとき、

$$d^i \circ d^j(e_k) = d^i(e_{k+1}) = e_{k+1} = d^j(e_k) = d^j \circ d^{i-1}(e_k)$$

さらに、$i-1 \leqq k$ においては、

$$d^i \circ d^j(e_k) = d^i(e_{k+1}) = e_{k+2} = d^j(e_{k+1}) = d^j \circ d^{i-1}(e_k)$$

となる。 □

系 1.5. $j < i$ のとき、$d_j \circ d_i = d_{i-1} \circ d_j : S_n(X) \longrightarrow S_{n-2}(X)$

定義 1.6. $C_n(X) = \mathbb{Z}S_n(X)$ と定義する。このとき、$\mathbb{Z}d_i : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ が誘導されるが、これらの交互和

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathbb{Z}d_i^n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

が定義できる。

命題 1.7. $C(X) = \{C_n(X), \partial_n\}$ は chain complex である。すなわち、$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ である。

証明 定義より、$\partial_{n-1} \circ \partial_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \mathbb{Z}d_j \circ d_i$ であるが、系 1.5 により、$j < i$ において、$(-1)^{i+j} d_j \circ d_i + (-1)^{i+j-1} d_{i-1} d_j = 0$ なので、上記の式の 2 項ずつが消えていく。つまり、$\partial_{n-1} \circ \partial_n$ は $n(n+1)$ 個の項からなるが、それを長方形で描いて対角線で区切ったとき、半分の三角形が $j < i$ に対応する部分で、その対角線をはさんだ反対側と対になり消えていくのである。 □

定義 1.8. 位相空間 X に対し、$S(X) = \{S_n(X)\ ,\ \partial_n\}$ を X の特異 chain complex とよび、ここから作られるホモロジー群のことを X の特異ホモロジー群と呼んで $H_*(X)$ であらわす。

すぐにわかることとして、$n < 0$ のとき、$S_n(X) = 0$ なので $H_n(X) = 0$ である。

次に連続写像とホモロジー群の関係について見ていく。

定義 1.9. $f : X \longrightarrow Y$ を連続写像としたとき、$S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$ が、$\sigma \mapsto f \circ \sigma$ により定義される。これより、自由アーベル群へ拡張され、

$$f_\sharp : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$$

が与えられる。具体的には、

$$f_\sharp \left(\sum a_i \sigma_i \right) = \sum a_i \left(f \circ \sigma_i \right)$$

である。

補題 1.10. $f_\sharp : C(X) \longrightarrow C(Y)$ は chain map である。

Proof. 生成元の $\sigma \in S_n(X)$ に対して可換性を示せばよい。

$$\partial_n^Y \circ f_\sharp(\sigma) = \partial_n^Y (f \circ \sigma) = \sum (-1)^i (f \circ \sigma \circ d_i) = f_\sharp \left(\sum (-1)^i f \circ \sigma \circ d_i \right) = f_\sharp \circ \partial_n^X (\sigma)$$

□

これより、連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ から、準同型 $f_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ が誘導される。

補題 1.11. f に対し、$f_\sharp$ の対応は関手的である。つまり、恒等写像に対しては恒等写像が対応し、合成を保つ。

証明 恒等射 $1 : X \longrightarrow X$ に対し、$1_\sharp : C(X) \longrightarrow C(X)$ は生成元 σ において、$\sigma \mapsto 1 \circ \sigma = \sigma$ より、$1_\sharp = 1$ である。

また、$f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ に対し、

$$(g \circ f)_\sharp(\sigma) = g \circ f \circ \sigma = g_\sharp \circ f_\sharp(\sigma)$$

なので、$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ である。 □

系 1.12. 空間が同相 $X \cong Y$ ならば、$H_*(X) \cong H_*(Y)$ である。つまり、任意の次元について $H_n(X) \cong H_n(Y)$ である。

証明 同相写像 $f : X \longrightarrow Y$ とその逆写像 $g : Y \longrightarrow X$ に対し、f_*, g_* を考えれば、これでホモロジー群の同型を誘導する。 □

これにより、この特異ホモロジー群が同相の判別に役立つことがわかる。なぜなら上の系の対偶を取ると、どこかの次元で $H_n(X) \ncong H_n(Y)$ ならば、$X \ncong Y$ となる。しかし残念ながらこの命題の逆は成り立たない。つまり同相でないことの証明には使えるが、同相の証明には使えないのである。一般にトポロジーでは、位相不変量という同相な空間に対しては変化しない性質に着目して、それが違えば同相ではないという議論をすることが多い。そういうわけで同相であることを示すのは、同相でないことを示すよりも困難（面倒）なことが多いのである。