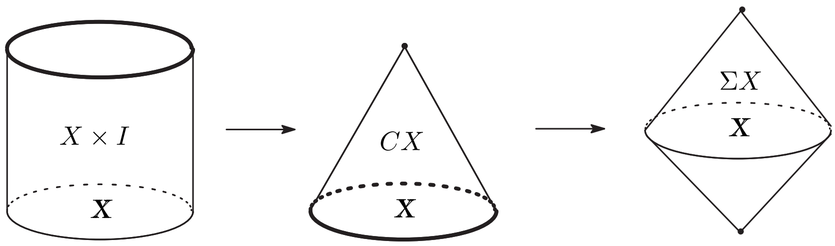
様々な位相空間の構成

位相空間は集合と開集合の族「位相」からなります。ここでは学部時代に習った位相空間論の延長として、もともとある空間からまた別の空間を構成することを目指します。

1　空間の柱・錐・懸垂

定義 1.1. X を位相空間としたとき、

- $I = [0, 1]$ という閉区間を考える。$X \times I$ を X の柱と呼ぶ。
- $CX = X \times I / X \times \{1\}$ を X の錐とよぶ。
- $\Sigma X = CX / X \times \{0\}$ を X の懸垂とよぶ。



また、$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像としたとき、

$$f \times 1_I : X \times I \longrightarrow Y \times I$$

から、$Cf : CX \longrightarrow CY$、$\Sigma f : \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ が誘導される。

位相空間を扱う際、その空間上の点を１つ指定した基点つき空間を考えることが多い。もちろん空でない空間ならば、適当に点を決めれられるため何のためと思うかも知れないが、基点を決めておくと都合のいいことも多いし、非連結な空間のような変な例を扱う際には、本質的な役割を果たす。

定義 1.2. 空間 X 上の点 x_0 が指定されているとき、(X, x_0) と書いて、基点つき空間と呼ぶ。

- $X \tilde{\times} I = X \times I / \{x_0\} \times I$ を X の被約柱と呼ぶ。
- $\tilde{C}X = X \times I / X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$ と定義し、これを X の被約錐と呼ぶ。
- $\tilde{\Sigma}X = X \times I / X \times \{1\} \cup X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I$ を X の被約懸垂と呼ぶ。

これらには自然と基点が決まり、面倒なときは $*$ であらわす。また場合によっては被約を区別せずに CX、ΣX で表すこともある。というより、基点付き空間を対象とするときは被約と思ってくれて間違いない。

基点つき空間の間の基点を保つ写像、$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$、つまり連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ で $f(x_0) = y_0$ となる写像に対し、

$$f \times 1_I : X \times I \longrightarrow Y \times I$$

から、$X \tilde{\times} I \longrightarrow Y \tilde{\times} I$、$\tilde{C}X \longrightarrow \tilde{C}Y$、$\tilde{\Sigma}X \longrightarrow \tilde{\Sigma}Y$ が誘導される。

具体的な空間に対しての構成を見てみる。先の図で見るように、$CS^1 \cong D^2$ であり、$\Sigma S^1 \cong S^2$ であるが、これは一般化できる。

命題 1.3. $CS^{n-1} \cong D^n$ であり、$\Sigma S^{n-1} \cong S^n$ である。

証明 $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|=1\}$、$D^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\leqq 1\}$ なので、

$$f : S^{n-1}\times I \longrightarrow D^n$$

を、$f(x,t)=(1-t)x$ で定義する。これは、$CS^{n-1}\longrightarrow D^n$ を誘導し、全単射連続であることは容易に確かめられる。あとは CS^{n-1} がコンパクトで D^n がハウスドルフであることから従う。次に、$g : S^{n-1}\times I \longrightarrow S^n$ を、

$$g(x,t)=\frac{1}{t^2(1-t)^2+(2t-1)^2}(t(1-t)x, 2t-1)$$

これが、同相 $\Sigma S^{n-1}\longrightarrow S^n$ を誘導する。 □

次は一般的に成り立つ事柄である。

補題 1.4. $i : X\longrightarrow X\times I$ を、$i(x)=(x,1)$ で定義すると、これはホモトピー同値写像である。

証明 $p : X\times I\longrightarrow X$ を第一成分への射影、つまり、$p(x,t)=x$ と定義すれば、$p\circ i=1_X$ であり、

$$H : X\times I\times I\longrightarrow X\times I$$

を、$H(x,t,s)=(x,1-ts)$ で定義すれば、これが $1_{X\times I}$ と $i\circ p$ をつなぐホモトピーである。 □

命題 1.5. X を空間としたとき、CX は可縮である。

証明 CX が $[x,1]$ に可縮であることを示す。補題 1.4 におけるホモトピー

$$H : X\times I\times I\longrightarrow X\times I$$

は、$CX\times I\longrightarrow CX$ を誘導し、$[x,1]$ と可縮であることがわかる。 □

大体これで通常の柱・錐・懸垂は見たが、被約の場合には基点の部分もつぶさなければならないので、少しわかりずらいかもしれないが、それほど変わらない。球面に関しても、$(1,0,\cdots,0)$ などを基点にとって、基点つき空間と思えば錐や懸垂に関しても同様のことが成り立ち、一般的に、元の空間と被約柱はホモトピー同値であり、被約錐は可縮である。

実のところ、被約とそうでないものの差はそれほどない。柱や錐の場合にはどちらも同じホモトピー型を持つことはすぐにわかり、よい基点の場合には、通常の懸垂と被約懸垂もホモトピー同値となる。

2 写像で貼り付けた空間

次は上記で述べたような空間を別の空間に貼り付けた空間を考える。貼り付けるには、その貼り付ける糊代で、どう貼り付けるかが問題になるが、それは連続写像で決めることができる。

定義 2.1. X を空間とし、$A\subset X$ を部分空間とする。さらに、$f : A\longrightarrow Y$ を連続写像としたとき、

$$X\cup_f Y = X\coprod Y/\sim$$

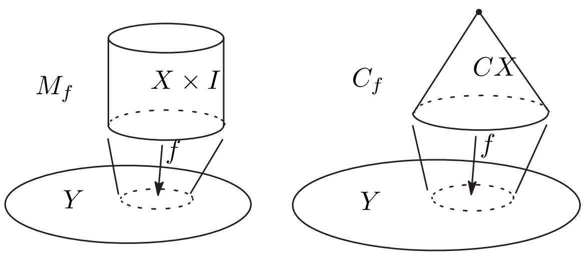
で定義する。ただし、$x\sim y$ は $f(x)=y$ により定義する。これを、Y に X を f で貼り付けた空間と呼ぶ。

よく用いられるのは、柱や錐を写像で貼り付けた写像柱、写像錐である。

定義 2.2. $f : X\longrightarrow Y$ を連続写像としたとき、$f : X\times\{0\}\longrightarrow Y$ と考える。

$$M_f=(X\times I)\cup_f Y$$

で定義し、f の写像柱と呼ぶ。また、$C_f=CX\cup_f Y$ を f の写像錐と呼ぶ。



次の事実は $X \simeq X \times I$ から容易に導かれる。

注意 2.3. $i : Y \longrightarrow M_f$ を、$i(y) = y$ により定義すると、これはホモトピー同値写像である。

3　ウェッジ和・スマッシュ積

定義 3.1. $\{(X_\lambda, x_{\lambda_0})\}_{\lambda \in \Lambda}$ を基点つき空間の族としたとき、

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \Big/ \coprod_{\lambda \in \Lambda} \{x_{\lambda_0}\}$$

と定義し、$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ のウェッジ和と呼ぶ。

補題 3.2. $(X, x_0), (Y, y_0)$ を基点つき空間とする。

$$X \vee Y \cong X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$$

ただし、後者は $X \times Y$ の部分空間である。

証明 $X \cong X \times \{y_0\}$、$Y \cong \{x_0\} \times Y$ から、

$$X \vee Y \cong X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$$

が誘導される。 □

例 3.3. $\vee S^1$ はブーケと呼ばれる空間である。

定義 3.4. $(X, x_0), (Y, y_0)$ を基点つき空間とする。

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

と定義し、X と Y のスマッシュ積と呼ぶ。

例 3.5. $S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$

証明 胞体分割の理論を用いると簡単に証明できる。$S^n = \mathrm{Int}D^n \cup *$ という分割を考えると、

$$S^n \times S^m = \mathrm{Int}(D^{n+m}) \cup (\mathrm{Int}D^n \times *) \cup (\{*\} \times \mathrm{Int}D^m) \cup (\{*\} \times \{*\})$$

と分解される。このとき、ウェッジ和の部分が後半の３つの和集合である。よって、

$$S^n \wedge S^m = S^n \times S^m / S^n \times \{*\} \cup \{*\} \times S^m \cong \mathrm{Int}D^{n+m} \cup \{*\} \cong S^{n+m}$$

□

定理 3.6. X を基点つき空間としたとき、$\Sigma X \cong X \wedge S^1$

証明 $I/\{0,1\} \cong S^1$ であることを用いると、ΣX と、$X \wedge S^1$ はどちらも $X \times I$ の商空間としてかけるため、$X \times I$ の恒等射から、$\Sigma X \cong X \wedge S^1$ という同型を導くのは難しくない。 □