Eilenberg-Zilberの定理

Alexander-Whitney 写像、および Eilenberg-Zilber の定理は積空間の特異 chain complex と、各々の特異 chain complex のテンソル積との関係を知るうえで、重要な役割を果たす。

定義 0.1. C : chain complex が $\widetilde{H}_n(C) = 0$ のとき、C を非輪状と呼ぶ。

補題 0.2. $\mathbb{Z}$ を、$\mathbb{Z}_n = 0$, $(n \neq 0)$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$, 微分を 0 写像として chain complex と見ると、これは非輪状である。

Proof. $n \neq 0$ のとき、$\widetilde{H}_n(C) = H_n(C) = 0$ である。また、

$$\widetilde{H}_0(C) = \mathrm{Ker}\varepsilon / \mathrm{Im}\partial_1 = 0$$

である。ただし、$\varepsilon : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ は恒等射である。 □

補題 0.3. P を一点空間としたとき、その特異 chain complex $S(P)$ は $\mathbb{Z}$ と chain homotopy 同値である。

Proof. $n \geqq 0$ に対し、$\Delta^n \longrightarrow P$ は定置写像しかないので、$S(P)_n = \mathbb{Z}$ であり、負の次数の部分では 0 である。この微分は恒等射と 0 写像から構成される。自然に chain map $j : \mathbb{Z} \longrightarrow S(P)$ が、j_0 が恒等射として定義されるが、逆に $p : S(P) \longrightarrow \mathbb{Z}$ も p_0 を恒等射として定義される。$p \circ j = 1$ であるのは明らかで、$j \circ p \simeq 1_{S(P)}$ の chain homotopy $H_n : S(P)_n \longrightarrow S(P)_{n+1}$ は $n \geqq 0$ で恒等射で与えられる。 □

系 0.4. X が可縮な位相空間ならば、$S(X)$ は非輪状である。

定義 0.5 (Alexander-Whitney 写像)**.** 位相空間 X, Y に対し、次数 0 の準同型、

$$\rho : S(X \times Y) \longrightarrow S(X) \otimes S(Y)$$

を次のように定義する。$p_1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ を射影とし、$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X \times Y$ に対し、

$$\rho(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} p_1 \circ \sigma \circ F_i \otimes p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i}$$

ただし、$F_i : \Delta^i \longrightarrow \Delta^n$ は、$[i] \longrightarrow [n]$, $j \mapsto j$ から誘導され、$L_{n-i} : \Delta^{n-i} \longrightarrow \Delta^n$ は、$[n-i] \longrightarrow [n]$, $j \mapsto j + i$ から誘導される。

この ρ は Alexander-Whitney 写像と呼ばれている。

補題 0.6. Alexander-Whitney 写像 ρ は chian map である。

Proof. $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X \times Y$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\partial\circ\rho(\sigma) &= \partial\left(\sum_{i=0}^{n} p_1\circ\sigma\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ L_{n-i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\partial(p_1\circ\sigma\circ F_i\otimes p_2)\circ\sigma\circ L_{n-i}+(-1)^i p_1\circ\sigma\circ F_i\otimes\partial(p_2\circ\sigma\circ L_{n-i})\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ F_i\circ s_j^i\otimes p_2\circ\sigma\circ L_{n-i}+\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{j+i}p_1\circ\sigma\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ L_{n-i}\circ s_j^{n-i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ F_i\circ s_j^i\otimes p_2\circ\sigma\circ L_{n-i}+\sum_{j=i}^{n}(-1)^{j}p_1\circ\sigma\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ L_{n-i}\circ s_{j-i}^{n-i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ s_j^n\circ F_{i-1}\otimes p_2\circ\sigma\circ L_{n-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i}^{n}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ s_j^n\circ L_{n-i-1}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ s_j^n\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ L_{n-i-1}+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i}^{n}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ s_j^n\circ L_{n-i-1}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ s_j^n\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ L_{n-i-1}+\sum_{j=i}^{n}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ s_j^n\circ L_{n-i-1}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ s_j^n\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ s_{i-1}^n\circ L_{n-i-1}+\sum_{j=i}^{n}(-1)^j p_1\circ\sigma\circ s_n^n\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ s_j^n\circ L_{n-i-1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_1\circ\sigma\circ s_j^n\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ s_j^n\circ L_{n-i-1}\right)
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\rho\circ\partial(\sigma) &= \rho\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma\circ s_j^n\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j p(\sigma\circ s_j^n)\\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_1\circ\sigma\circ s_j^n\circ F_i\otimes p_2\circ\sigma\circ s_j^n\circ L_{n-i-1}\right)
\end{aligned}
$$

これより、$\partial\circ\rho(\sigma)=\rho\circ\partial(\sigma)$ である。 □

次の補題は Alexander-Whitney 写像の自然性を表している。

補題 0.7. 位相空間 X, Y, Z, W と連続写像、$f: X\longrightarrow Z$, $g: Y\longrightarrow W$ に対し、

$$\rho\circ(f\times g)_\sharp = f_\sharp\otimes g_\sharp\circ\rho$$

である。

Proof. つまり、次の図式の可換を示せばよい。

$$
\begin{array}{ccc}
S(X\times Y) & \xrightarrow{\rho} & S(X)\otimes S(Y)\\
\downarrow{\scriptstyle (f\times g)_\sharp} & & \downarrow{\scriptstyle f_\sharp\otimes g_\sharp}\\
S(Z\times W) & \xrightarrow[\rho]{} & S(Z)\otimes S(W)
\end{array}
$$

$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X \times Y$ に対し、

$$
\begin{aligned}
f_\sharp \otimes g_\sharp \circ \rho(\sigma) &= f_\sharp \otimes g_\sharp \left(\sum_{i=0}^{n} p_1 \circ \sigma \circ F_i \otimes p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f \circ p_1 \circ \sigma \circ F_i \otimes g \circ p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} f \circ p_1 \circ \sigma \circ F_i \otimes g \circ p_2 \circ \sigma \circ L_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} p_1 \circ (f \times g) \circ \sigma \circ F_i \otimes p_2 \circ (f \times g) \circ \sigma \circ L_{n-i} \\
&= \rho((f \times g) \circ \sigma) = \rho \circ (f \times g)_\sharp(\sigma)
\end{aligned}
$$

□

定理 0.8 (Eilenberg-Zilber の定理)**.** 位相空間 X, Y に対し、Alexander-Whitney 写像

$$\rho : S(X \times Y) \longrightarrow S(X) \otimes S(Y)$$

は chain homotopy 同値写像であり、そのホモトピー写像も自然である。

Proof. ホモトピー逆写像 $\tau : S(X) \otimes S(Y) \longrightarrow S(X \times Y)$ を次で定義する。当然 $\tau_n = 0, \ (n < 0)$ で、

$$\tau_0 : (S(X) \otimes S(Y))_0 \longrightarrow S_0(X \times Y)$$

を定義するわけだが、$S_n(X) = 0, \ (n < 0)$ であるため、

$$\tau_0 : \bigoplus_{p+q=0} S_p(X) \otimes S_q(Y) = S_0(X) \otimes S_0(Y) \longrightarrow S_0(X \times Y)$$

であるのだが、$x \otimes y \in S_0(X) \otimes S_0(Y)$ に対し、$\tau_0(x \otimes y) = (x, y)$ で定義すればよい。ただし、$(x, y)(e_0) = (x, y)$ で与えられる。ここで、

$$\partial_0 \circ \tau_0 = \tau_{-1} \circ \partial_0, \ (f \times g)_\sharp \circ \tau_0 = \tau_0 \circ f_\sharp \otimes g_\sharp$$

が成立するのは容易に確かめられる。以下は帰納的に定義する。各 $m < n, \ (n \geqq 1)$ に対し、

$$\tau_m : (S(X) \otimes S(Y))_m \longrightarrow S_m(X \times Y)$$

が定義され、$\partial_m \circ \tau_m = \tau_{m-1} \circ \partial_m, \ (f \times g)_\sharp \circ \tau_m = \tau \circ f_\sharp \otimes g_\sharp$ を満たすとする。このとき、

$$\tau_n : (S(X) \otimes S(Y))_n \longrightarrow S_n(X \times Y)$$

を次で定義する。まず、考えている世界を $X \times Y$ から $\Delta^p \times \Delta^q$ へ移そう。$p + q = n$ を満たす (p, q) に対し、恒等射のテンソル積

$$1_p \otimes 1_q \in S_p(\Delta^p) \otimes S_q(\Delta^q)$$

を考える。ここで、

$$\partial_{n-1}(\tau_{n-1} \circ \partial_n(1_p \otimes 1_q)) = \tau_{n-2} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n(1_p \otimes 1_q) = 0, (n > 1)$$

$$\varepsilon \circ \tau_0 \circ \partial_1(1_p \otimes 1_q) = \varepsilon \circ \partial_1(1_p \otimes 1_q) = 0, (n = 1)$$

であるため、$\tau_{n-1} \circ \partial_n(1_p \otimes 1_q) \in \mathrm{Ker}\partial_{n-1}$ となることがわかる。さらに、$\Delta^p \times \Delta^q$ は可縮なので、$\widetilde{H}_*(\Delta^p \times \Delta^q) = 0$ より、$\mathrm{Ker}\partial_{n-1} = \mathrm{Im}\partial_n$ である。よって、$x \in S_n(\Delta^p \times \Delta^q)$ で、$\partial_n(x) = \tau_{n-1} \circ \partial_n(1_p \otimes 1_q)$ を満たすような元が存在する。このような $x \in S_n(\Delta^p \times \Delta^q)$ を選び、$\tau_n(1_p \otimes 1_q) = x$ で定義する。こ

の定義は x の選び方に依存するが、後で見るようにいずれにしても ρ のホモトピー逆写像なので、chain homotopic を除いて一意的である。一般的な $X \times Y$ に対しては、$\sigma_1 \in S_p(X)$, $\sigma_2 \in S_q(Y)$ に対し、

$$\tau_n(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = (\sigma_1 \times \sigma_2)_\sharp \tau_n(1_p \otimes 1_q)$$

で定義する。これより、

$$\begin{aligned}
\partial_n \circ \tau_n(\sigma_1 \otimes \sigma_2) &= \partial_n \circ (\sigma_1 \times \sigma_2)_\sharp \tau_n(1_p \otimes 1_q) \\
&= (\sigma_1 \times \sigma_2)_\sharp \circ \partial_n \circ \tau_n(1_p \otimes 1_q) \\
&= (\sigma_1 \times \sigma_2)_\sharp \circ \tau_{n-1} \circ \partial_n(1_p \otimes 1_q) \\
&= \tau_{n-1} \circ (\sigma_1)_\sharp \otimes (\sigma_2)_\sharp \circ \partial_n(1_p \otimes 1_q) = \tau_{n-1} \circ \partial_n(\sigma_1 \otimes \sigma_2)
\end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned}
(f \times g)_\sharp \circ \tau_n(\sigma_1 \otimes \sigma_2) &= (f \times g)_\sharp(\sigma_1 \times \sigma_2)_\sharp \tau_n(1_p \otimes 1_q) \\
&= (f \circ \sigma_1 \times g \circ \sigma_2)_\sharp \tau_n(1_p \otimes 1_q) \\
&= \tau \circ (f \circ \sigma_1 \times g \circ \sigma_2) = \tau \circ f_\sharp \otimes g_\sharp(\sigma_1 \otimes \sigma_2)
\end{aligned}$$

これより、自然な chain map

$$\tau_n : (S(X) \otimes S(Y))_n \longrightarrow S_n(X \times Y)$$

が構成できた。次にこれが、ρ の chain homotopy inverce であることを示そう。まずは、

$$\tau \circ \rho \simeq 1 : S(X \times Y) \longrightarrow S(X \times Y)$$

を示す。よって、次数 1 の準同型、$G : S(X \times Y) \longrightarrow S(X \times Y)$ を、$G_n = 0, (n \leqq 0)$ で定義し、$\tau_0 \circ \rho_0 = 1$ なので、

$$\partial_1 \circ G_0 + G_{-1} \circ \partial_0 = \tau_0 \circ p_0 - 1$$

である。以下は τ 同様、帰納的に定義する。今、各 $m < n, (n \geqq 1)$ に対し、G_m は自然で

$$\partial_{m+1} \circ G_m + G_{m-1} \circ \partial_m = \tau_m \circ p_m - 1 \quad , \quad (f \times g)_\sharp \circ G_m = G_m \circ (f \times g)_\sharp$$

が成立したとする。このとき、

$$G_n : S_n(X \times Y) \longrightarrow S_{n+1}(X \times Y)$$

を次のように定義する。まず、対角写像 $d : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n \times \Delta^n$ を考えると、$d \in S_n(\Delta^n \times \Delta^n)$ である。ここで、

$$(-G_{n-1} \circ \partial_n + \tau_n \circ p_n - 1)(d) \in S_n(\Delta^n \times \Delta^n)$$

を考える。

$$\begin{aligned}
&\partial_n(-G_{n-1} \circ \partial_n + \tau_n \circ p_n - 1)(d) \\
=&(-\partial_n \circ G_{n-1} \circ \partial_n + \partial_n \circ \tau_n \circ p_n - \partial_n)(d) \\
=&((G_{n-2} \circ \partial_{n-1} - \tau_{n-1} \circ p_{n-1} + 1) \circ \partial_n + \partial_n \circ \tau_n \circ p_n - \partial_n)(d) = 0
\end{aligned}$$

なので、$(-G_{n-1} \circ \partial_n + \tau_n \circ p_n - 1)(d) \in \mathrm{Ker}\partial_n$ であり、$\widetilde{H}(\Delta^n \times \Delta^n) = 0$ なので、$\mathrm{Ker}\partial_n = \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ となる。これより、$x \in S_{n+1}(\Delta^n \times \Delta^n)$ で、$\partial_{n+1}(x) = (-G_{n-1} \circ \partial_n + \tau_n \circ p_n - 1)(d)$ となる元が存在する。このような $x \in S_{n+1}(\Delta^n \times \Delta^n)$ を選び、$G_n(d) = x$ で定義する。また一般に、$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X \times Y$ に対し、

$$G_n(\sigma) = (p_1 \circ \sigma \times p_2 \circ \sigma)_\sharp \circ G_n(d)$$

と定義すれば、

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}\circ G_n(\sigma) &= \partial_{n+1}\circ(p_1\circ\sigma\times p_2\circ\sigma)_\sharp\circ G_n(d)\\ &= (p_1\circ\sigma\times p_2\circ\sigma)_\sharp\circ\partial_{n+1}\circ G_n(d)\\ &= (p_1\circ\sigma\times p_2\circ\sigma)_\sharp(-G_{n-1}\circ\partial_n+\tau_n\circ p_n-1)(d)\\ &= (-G_{n-1}\circ\partial_n+\tau_n\circ p_n-1)\circ(p_1\circ\sigma\times p_2\circ\sigma)_\sharp(d)\\ &= (-G_{n-1}\circ\partial_n+\tau_n\circ p_n-1)(\sigma)\end{aligned}$$

よって、$\partial_{n+1}\circ G_n+G_{n-1}\circ\partial_n=\tau_n\circ p_n-1$。さらに、

$$\begin{aligned}(f\times g)_\sharp\circ G_n(\sigma) &= (f\times g)_\sharp\circ(p_1\circ\sigma\times p_2\circ\sigma)_\sharp\circ G_n(d)\\ &= (f\circ p_1\circ\sigma\times g\circ p_2\circ\sigma)_\sharp\circ G_n(d)\\ &= (p_1\circ(f\times g)\circ\sigma\times p_2\circ(f\times g)\circ\sigma)_\sharp\circ G_n(d)\\ &= G_n((f\times g)\circ\sigma)=G_n\circ(f\times g)_\sharp(\sigma)\end{aligned}$$

これより、G は自然で $\tau\circ\rho\overset{G}{\simeq}1$。今度は、

$$\rho\circ\tau\simeq 1: S(X)\otimes S(Y)\longrightarrow S(X)\otimes S(Y)$$

を示すのだが、$S(\Delta^p)\otimes S(\Delta^q)$ は非輪状なので今と同様にして示せる。 □

上の τ, G の帰納的な構成は Δ^p の可縮性、ひいては $S(\Delta^p)$ が非輪状であることが大きなポイントになっている。このような証明方法は非輪状のモデルの方法と呼ばれている。

命題 0.9. 3 つの位相空間 X, Y, Z に対し、次の図式、

$$\begin{tikzcd} S(X\times Y\times Z) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & S(X)\otimes S(Y\times Z) \arrow[d, "1\otimes\rho"] \\ S(X\times Y)\otimes S(Z) \arrow[r, "\rho\otimes 1"'] & S(X)\otimes S(Y)\otimes S(Z) \end{tikzcd}$$

は chain homotopy 可換である。つまり、$(1\otimes\rho)\circ\rho\simeq\rho\otimes(1\circ\rho)$ である。

Proof. 非輪状モデルの方法による。対角写像

$$d:\Delta^n\longrightarrow\Delta^n\times\Delta^n\times\Delta^n$$

$d(x)=(x,x,x)$ の写像を考えばよい。 □

補題 0.10. C, D, E : chain complex に対し、次数 0 の準同型

$$(C\otimes D)\otimes E\longrightarrow C\otimes(D\otimes E)$$

を、$(c\otimes d)\otimes e\mapsto c\otimes(d\otimes e)$ で定義すると、これは chain map で同型である。

Proof. 各微分との可換性を示すだけなので省略。 □

注意 0.11. C, D : chain complex に対し、

$$C\otimes D\longrightarrow D\otimes C$$

を、$c\otimes d\mapsto d\otimes c$ で定義するとこれは chain map ではない。何がいけないかというとテンソル積のバウンダリーには $(-1)^p$ がかかってきてその分に差異が生じるのである。よって、もう少しこの写像を変形してみよう。

命題 0.12. C, D : chain complex に対し、$T : C \otimes D \longrightarrow D \otimes C$ を、$c \otimes d \in C_p \otimes D_q$ に対し、$T(c \otimes d) = (-1)^{pq} d \otimes c$ で定義するとこれは chain map の同型である。

Proof. $c \otimes d \in C_p \otimes D_q$ に対し、

$$\begin{aligned}\partial \circ T(c \otimes d) &= (-1)^{pq} \partial(d \otimes c)\\ &= (-1)^{pq}(\partial(d) \otimes c + (-1)^q d \otimes \partial(c))\\ &= (-1)^{pq} \partial(d) \otimes c + (-1)^{q(p+1)} d \otimes \partial(c)\end{aligned}$$

でありまた、

$$\begin{aligned}T \circ \partial(c \otimes d) &= T(\partial(c) \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial(d))\\ &= (-1)^{q(p-1)} d \otimes \partial(c) + (-1)^p (-1)^{p(q-1)} \partial(d) \otimes c\\ &= (-1)^{q(p-1)} d \otimes \partial(c) + (-1)^{pq} \partial(d) \otimes c\end{aligned}$$

これより、$T \circ \partial = \partial \circ T$ である。 □

命題 0.13. 位相空間 X, Y に対し次の図式、

$$\begin{tikzcd} S(X \times Y) \arrow[r, "t_\sharp"] \arrow[d, "\rho"'] & S(Y \times X) \arrow[d, "\rho"] \\ S(X) \otimes S(Y) \arrow[r, "T"'] & S(Y) \otimes S(X) \end{tikzcd}$$

は chain homotopy 可換である。ただし、$t : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ は $t(x, y) = (y, x)$ である。

Proof. 非輪状モデルの方法による。対角写像 $d : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n \times \Delta^n$ を用いればよい。 □