Künneth の公式

Eilenberg-Zilber の定理により、$S(X \times Y)$ と $S(X) \otimes S(Y)$ は自然に chain homotopy 同値であることがわかった。つまり、$H_*(X \times Y) \cong H_*(S(X) \otimes S(Y))$ である。さて、次に興味を引くのは、$H_*(S(X) \otimes S(Y))$ と $H_*(X) \otimes H_*(Y)$ の関係である。ここでは、より一般に 2 つの chain complex に対し、$H_*(C \otimes D)$ と $H_*(C) \otimes H_*(D)$ を比較しよう。

補題 0.1. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ が完全列ならば、任意の加群 D に対し、

$$A \otimes D \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes D \longrightarrow 0$$

も完全列である。

Proof. $c \otimes d \in C \otimes D$ に対し、$c \in C$ で、g が全射であるため $g(b) = c$ となる $b \in B$ が存在する。よって、$b \otimes d \in B \otimes D$ に対し、$g \otimes 1(b \otimes d) = c \otimes d$ なので、$g \otimes 1$ は全射である。また、

$$(g \otimes 1) \circ (f \otimes 1) = (f \circ g) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$$

なので、$\mathrm{Im}(f \otimes 1) \subset \mathrm{Ker}(g \otimes 1)$ である。最後にこの逆の包含関係を示す。今、$E = \mathrm{Im}(f \otimes 1)$ とおく。射影

$$p : B \otimes D \longrightarrow (B \otimes D)/E$$

を考える。さらに $E \subset \mathrm{Ker}(g \otimes 1)$ であるので、$g \otimes 1$ は、

$$\varphi : (B \otimes D)/E \longrightarrow C \otimes D$$

を誘導し、$g \otimes 1 = \varphi \circ p$ である。ここで、g が全射より、$c \in C$ に対し、$g(b) = c$ となる $b \in B$ が存在する。このような $b \in B$ を各 c に対して選び、$h : C \longrightarrow B$ を、$h(c) = b$ で定義する。(注 : h は準同型とは限らない)。ここで、準同型

$$\tilde{h} : F(C \times D) \longrightarrow (B \otimes D)/E$$

を、$\tilde{h}(c, d) = p(h(c) \otimes d)$ で定義する。ただし、$F(C \times D)$ は $C \times D$ から生成される自由加群である。これが $C \otimes D$ 上の準同型を誘導することを示すため、次の線形形式を移してみる。

$$\begin{aligned}\tilde{h}((c_1 + c_2, d) - (c_1, d) - (c_2, d)) &= p(h(c_1 + c_2) \otimes d - h(c_1) \otimes d - h(c_2) \otimes d) \\ &= p((h(c_1 + c_2) - h(c_1) - h(c_2)) \otimes d)\end{aligned}$$

ここで、

$$g(h(c_1 + c_2) - h(c_1) - h(c_2)) = (c_1 + c_2) - c_1 - c_2 = 0$$

なので、$h(c_1 + c_2) - h(c_1) - h(c_2)) \in \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$ であり、つまり

$$(h(c_1 + c_2) - h(c_1) - h(c_2)) \otimes d \in \mathrm{Im}(f \otimes 1) = E$$

これより、$p((h(c_1 + c_2) - h(c_1) - h(c_2)) \otimes d) = 0$ である。よって、

$$\tilde{h}(c_1 + c_2, d) = \tilde{h}(c_1, d) + \tilde{h}(c_2, d)$$

であることがわかり、同様に $\tilde{h}(c, d_1 + d_2) = \tilde{h}(c, d_1) + \tilde{h}(c, d_2)$ も示せる。これにより、$\tilde{h}$ から、

$$\psi : C \otimes D \longrightarrow B \otimes D/E$$

が誘導される。ここで、$b \in B$, $d \in D$ に対して、

$$\psi \circ \varphi(p(b \otimes d)) = \psi \circ (g \otimes 1)(b \otimes d) = \psi(g(b) \otimes d) = p(h \circ g(b) \otimes d)$$

$h \circ g(b) = b$ とは限らないが、

$$h \circ g(b) - b \in \mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$$

であるので、$h \circ g(b) \otimes d - b \otimes d \in \mathrm{Im}(f \otimes 1) = E$ となり、$p(h \circ g(b) \otimes d) = p(b \otimes d)$ である。これより、$\psi \circ \varphi = 1$ であり、φ は単射である。今、$b \otimes d \in B \otimes D$ に対し、$(g \otimes 1)(b \otimes d) = 0$ とすると、$\varphi \circ p(b \otimes d) = 0$ であり、φ が単射なので、$p(b \otimes d) = 0$ である。よって、$b \otimes d \in E = \mathrm{Im}(f \otimes 1)$ がわかり、$\mathrm{Ker}(g \otimes 1) \subset \mathrm{Im}(f \otimes 1)$ となる。 □

補題 0.2. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ が分解する完全列ならば、任意の加群 D に対し、

$$0 \longrightarrow A \otimes D \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes D \longrightarrow 0$$

も分解する完全列である。

Proof. 分解準同型を $h : B \longrightarrow A$ とすると、$h \circ f = 1_A$ であるので、

$$(h \otimes 1) \circ (f \otimes 1) = 1_{A \otimes D}$$

であり、$f \otimes 1$ は単射となる。残りは補題 0.2 より成り立つ。 □

補題 0.3. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ が完全列で、D が自由加群ならば、

$$A \otimes D \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes D \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes D$$

も完全列となる。

Proof. $D \cong \oplus \mathbb{Z}$ であるので、

$$A \otimes D \cong A \otimes (\oplus \mathbb{Z}) \cong \oplus (A \otimes \mathbb{Z}) \cong \oplus A$$

であり、次の可換図を考える。

$$\begin{tikzcd}
A \otimes D \arrow[r, "f \otimes 1"] \arrow[d, "\cong"'] & B \otimes D \arrow[r, "g \otimes 1"] \arrow[d, "\cong"] & C \otimes D \arrow[d, "\cong"'] \\
\oplus A \arrow[r, "\oplus f"'] & \oplus B \arrow[r, "\oplus g"'] & \oplus C
\end{tikzcd}$$

ここで、下列は完全であるので、上列も完全になる。 □

定義 0.4. 2 つの chain complex C, D に対し、

$$\kappa : H_*(C) \otimes H_*(D) \longrightarrow H_*(C \otimes D)$$

を $[c] \in H_n(C)$, $[d] \in H_m(D)$ に対し、

$$\kappa([c] \otimes [d]) = [c \otimes d] \in H_{n+m}(C \otimes D)$$

と定義する。

補題 0.5. $\kappa : H_*(C) \otimes H_*(D) \longrightarrow H_*(C \otimes D)$ は well definded な準同型である。

Proof. 準同型であることは明らかなので、きちんと定義域に収まっているかを確認しよう。$c \in \mathrm{Ker}\partial_n^C$ と、$d \in \mathrm{Ker}\partial_m^D$ に対し、

$$\partial_{n+m}(c \otimes d) = \partial_n^C(c) \otimes d + (-1)^n c \otimes \partial_m^D(d) = 0$$

これより、$c \otimes d \in \mathrm{Ker}\partial_{n+m}$ である。また、$c \in \mathrm{Im}\partial_{n+1}^C$ とすると、$\partial_{n+1}(c') = c$ となる $c' \in C_{n+1}$ が存在する。ここで、$c' \otimes d \in C_{n+1} \otimes \mathrm{Ker}\partial_m^D$ に対し、

$$\partial_{n+m+1}(c' \otimes d) = \partial_{n+1}^C(c') \otimes d + (-1)^{n+1} c \otimes \partial_m^D(d) = c \otimes d$$

よって、$c \otimes d \in \mathrm{Im}\partial_{n+m+1}$。また、逆に $d \in \mathrm{Im}\partial^D_{m+1}$ としても同様のことが言える。双線形形式も保つため、

$$\kappa : H_*(C) \otimes H_*(D) \longrightarrow H_*(C \otimes D)$$

は well definded な準同型である。 □

補題 0.6. C を自由生成の chain complex で、すべての微分が自明なもの $\partial^C_* = 0$ とする。よって、$H_*(C) = C$ となる。任意の chain complex D に対し、

$$\kappa : C \otimes H_*(D) \longrightarrow H_*(C \otimes D)$$

は同型である。

Proof. まず、以下の完全列を考える。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\partial^{\mathrm{D}}_{\mathrm{q+1}} \longrightarrow \mathrm{Ker}\partial^D_q \longrightarrow H_q(D) \longrightarrow 0$$

ただし、写像は包含写像と射影である。また、C が自由であるため、

$$0 \longrightarrow C_p \otimes \mathrm{Im}\partial^D_{q+1} \longrightarrow C_p \otimes \mathrm{Ker}\partial^D_q \longrightarrow C_p \otimes H_q(D) \longrightarrow 0$$

も完全である。さらに、

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes \mathrm{Im}\partial^D_{q+1} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes \mathrm{Ker}\partial^D_q \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes H_q(D) \longrightarrow 0$$

が完全となる。また、同じくして、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\partial^{C\otimes D}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\partial^{C\otimes D}_n \longrightarrow H_n(C \otimes D) \longrightarrow 0$$

も完全である。ここで、補題 0.5 の証明を見ると、

$$\kappa' : \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes \mathrm{Im}\partial^D_{q+1} \longrightarrow \mathrm{Im}\partial^{C\otimes D}_{n+1}$$

$$\kappa'' : \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes \mathrm{Ker}\partial^D_q \longrightarrow \mathrm{Ker}\partial^{C\otimes D}_n$$

が、$\kappa'(c \otimes d) = c \otimes d$, $\kappa''(c \otimes d) = c \otimes d$ により定義される。ただし、Ker の方は、$\partial^C = 0$ であることが効いてくる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \oplus C_p \otimes \mathrm{Im}\partial^D_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\kappa'"'] & \oplus C_p \otimes \mathrm{Ker}\partial^D_q \arrow[r] \arrow[d, "\kappa''"'] & \oplus C_p \otimes H_q(D) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\partial^{C\otimes D}_{n+1} \arrow[r] & \mathrm{Ker}\partial^{C\otimes D}_n \arrow[r] & H_n(C \otimes \mathrm{D}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が可換となる。ここで、$x \in \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ に対し、$\partial_{n+1}\left(\sum a_i(c_i \otimes d_i)\right) = x$ となる $\sum a_i(c_i \otimes d_i) \in (C \otimes D)_{n+1}$ が存在する。ただし、$a_i \in \mathbb{Z}$, $c_i \in C_p$, $d_i \in D_{q+1}$, $p + q = n$ である。さらに、

$$\partial_{n+1}\left(\sum a_i(c_i \otimes d_i)\right) = \sum a_i(\partial^C_p(c_i) \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial^D_{q+1}(d_i)) = \sum (-1)^p a_i(c_i \otimes \partial^D_{q+1}(d))$$

これより、$\kappa'\left(\sum(-1)^p a_i(c_i \otimes \partial^D_{q+1}(d))\right) = x$ なので、κ' は全射である。また、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\partial^D_q \xrightarrow{i} D_q \xrightarrow{\partial^D_q} D_{q-1}$$

が完全であり、C が自由であるため、

$$0 \longrightarrow \oplus\left(C_p \otimes \mathrm{Ker}\partial^D_q\right) \xrightarrow{\oplus(1\otimes i)} \oplus\left(C_p \otimes D_q\right) \xrightarrow{\oplus\left(1\otimes\partial^D_q\right)} \oplus\left(C_p \otimes D_{q-1}\right)$$

も完全となる。このため、準同型定理より、

$$\oplus\left(C_p \otimes \mathrm{Ker}\partial^D_q\right) \cong \mathrm{Ker}(\oplus\left(1 \otimes \partial^D_q\right)) = \mathrm{Ker}\partial^{C\otimes D}_n$$

であり、後方の = は簡単に示せて、この同型が κ'' であることも容易にわかる。よって、上記の可換図と 5 項補題によって $\kappa : C \otimes H_*(D) \longrightarrow H_*(C \otimes D)$ が同型となる。 □

定理 0.7 (Künneth の公式)**.** 2 つ chain complex C, D に対し、$C, H_*(C)$ が共に自由ならば、

$$\kappa : H_*(C) \otimes H_*(D) \longrightarrow H_*(C \otimes D)$$

は同型である。

Proof. 面倒なので、$Z_p = \mathrm{Ker}\partial_p^C$, $B_p = \mathrm{Im}\partial_{p+1}^C$, $\overline{B}_p = \mathrm{Im}\partial_p^C$ とおき、Z, B, $\overline{B}$ をそれぞれバウンダリーを 0 として chain complex と見なす。

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{j} C \xrightarrow{d} C/Z \cong \overline{B} \longrightarrow 0$$

は分解する chain complex の短完全列であり、ここから、

$$0 \longrightarrow Z \otimes D \xrightarrow{j \otimes 1} C \otimes D \xrightarrow{d \otimes 1} \overline{B} \otimes D \longrightarrow 0$$

の chain complex の短完全列が生まれるので、さらにここからホモロジー群の長い完全列、

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C \otimes D) \xrightarrow{d_*} H_{n+1}(\overline{B} \otimes D) \xrightarrow{\overline{\partial_*}} H_n(Z \otimes D) \xrightarrow{j_*} H_n(C \otimes D) \longrightarrow \cdots$$

が導かれる。ここれで j_*、d_* はそれぞれ、$j \otimes 1$、$d \otimes 1$ からの誘導で、$\overline{\partial_*}$ は連結準同型である。ここで、$\overline{B}_n = B_{n-1}$ であるため、

$$\begin{aligned}
(\overline{B} \otimes D)_{n+1} &= \bigoplus_{p+q=n+1} \overline{B}_p \otimes D_q \\
&= \bigoplus_{p+q=n+1} B_{p-1} \otimes D_q \quad p-1 = p' \text{とおけば、} \\
&= \bigoplus_{p'+q=n} B_{p'} \otimes D_q = (B \otimes D)_n
\end{aligned}$$

なので、$H_{n+1}(\overline{B} \otimes D) \cong H_n(B \otimes D)$ であり、この同型で長い完全列を取り替えると、

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C \otimes D) \xrightarrow{\partial_*} H_n(B \otimes D) \xrightarrow{i_*} H_n(Z \otimes D) \xrightarrow{j_*} H_n(C \otimes D) \longrightarrow \cdots$$

である。ただし、∂_*、i_* はそれぞれ、$\partial^C \otimes 1$、$i \otimes 1$ からの誘導である。また、

$$0 \longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p(C) \longrightarrow 0$$

は完全であり、$H_p(C)$ が自由であるから上記は分解し、補題 0.2 により、

$$0 \longrightarrow \oplus B_p \otimes H_q(D) \longrightarrow \oplus Z_p \otimes H_q(D) \longrightarrow \oplus H_p(C) \otimes H_q(D) \longrightarrow 0$$

が完全となる。よって次の図式は可換であり、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \oplus B_p \otimes H_q(D) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & \oplus Z_p \otimes H_q(D) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & \oplus H_p(C) \otimes H_q(D) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 0 \\
{} \arrow[r, "\partial_*"'] & H_n(B \otimes D) \arrow[r, "i_*"'] & H_n(Z \otimes D) \arrow[r, "j_*"'] & H_n(C \otimes D) \arrow[r, "\partial_*"'] & {}
\end{tikzcd}$$

また、C が自由であるから、補代 0.6 より、左と中央の κ は同型である。さらに上列は短完全列であるから、i_* は単射である。よって、$\mathrm{Im}\partial_* = \mathrm{Ker} i_* = 0$ であるため、$\partial_* = 0$ である。これより、補題 0.6 と同じくして、

$$\kappa : H_*(C) \otimes H_*(D) \longrightarrow H_*(C \otimes D)$$

が同型となる。 □

注意 0.8. 上記の定理の仮定で、C, $H_*(C)$ が自由というのを D, $H_*(D)$ が自由に変えても成立する。

Künneth の定理は積空間のホモロジーの計算に非常に有力なツールとなる。

定義 0.9. 2つの位相空間 X, Y に対し、Alexander-Whitney 写像の chain homotopy inverce の

$$\tau : S(X) \otimes S(Y) \longrightarrow S(X \times Y)$$

に対し、

$$\tau_* : H_*(S(X) \otimes S(Y)) \longrightarrow H_*(X \times Y)$$

は同型であり、

$$\kappa : H_*(X) \otimes H_*(Y) \longrightarrow H_*(S(X) \otimes S(Y))$$

に対し、これらの合成

$$\tau_* \circ \kappa : H_*(X) \otimes H_*(Y) \longrightarrow H_*(X \times Y)$$

を考え、$x \otimes y \in H_*(X) \otimes H_*(Y)$ において、その像、

$$\tau_* \circ \kappa(x \otimes y) = x \times y \in H_*(X \times Y)$$

と書き、x と y のクロス積と呼ぶ。簡単に書けば $[\alpha] \in H_p(X)$, $[\beta] \in H_q(Y)$ に対し、

$$[\alpha] \times [\beta] = [\tau(\alpha \otimes \beta)]$$

である。

位相空間に適用するならば、Künneth の公式は次の形となる。

系 0.10. 2つの位相空間 X, Y に対し、$H_*(X)$ または $H_*(Y)$ が自由ならば、クロス積によって定義される写像、

$$\times : H_*(X) \otimes H_*(Y) \longrightarrow H_*(X \times Y)$$

は同型である。

以下はこのクロス積の自然性、結合性、可換性について言及したものである。ほとんどは Alexander-Whitney 写像 ρ、およびその chain homotopy inverse τ の性質によるため、前節を参照願いたい。

命題 0.11. 位相空間 X, Y, Z, W と連続写像 $f : X \longrightarrow Z$, $g : Y \longrightarrow W$ に対し、

$$(f \times g)_*(a \times b) = f_*(a) \times f_*(b)$$

となる。ただし、$a \in H_*(X)$, $b \in H_*(Y)$ である。

命題 0.12. 位相空間 X, Y, Z で、$a \in H_*(X)$, $b \in H_*(Y)$, $c \in H_*(Z)$ に対し、

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

である。

命題 0.13. 位相空間 X, Y で、座標変換の同相写像 $t : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ に対し、$a \in H_p(X)$, $b \in H_q(Y)$ とすると、

$$t_*(a \times b) = (-1)^{pq} b \times a$$

である。

命題 0.14. 位相空間 X, Y で、射影 $p : X \times Y \longrightarrow X$ に対し、$a \in H_p(X), b \in H_q(Y)$ とすると、

$$p_*(a \times b) = \begin{cases} \varepsilon(b)a & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

ただし、$\varepsilon(b) \in \mathbb{Z}$ は b の係数和である。

Proof. Z : 一点空間とすると、命題 0.11 から次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
H_p(X)\otimes H_q(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "1\otimes z_*"'] & H_{p+q}(X\times Y) \arrow[r, "="] \arrow[d, "(1\times z)_*"'] & H_{p+q}(X\times Y) \arrow[d, "p_*"] \\
H_p(X)\otimes H_q(Z) \arrow[r, "\times"'] & H_{p+q}(X\times Z) \arrow[r, "p_*"'] & H_{p+q}(X)
\end{tikzcd}$$

ただし、z は一点空間への写像。ここで、$q\neq 0$ のとき、$H_q(Z)=0$ であるため、$H_p(X)\otimes H_q(Z)=0$ となり、$p_*\circ\times=0$ である。そして、問題は $q=0$ の時である。$[\sigma]\in H_p(X)$, $[*]\in H_0(Z)$ に対し、

$$u:\Delta^p\longrightarrow X\times Z$$

を、$u(x)=(\sigma(x),*)$ で定義する。ただし、$*:\Delta^0\longrightarrow Z$ は恒等射。$H_0(Z)\cong\mathbb{Z}$ が自由であるから、図式下列のクロス積は全単射であり、$\times([\sigma]\otimes[*])=[u]$ である。なぜなら、

$$\rho(u)=\sum_{i=0}^{p}p_1\circ u\circ F_i\otimes p_2\circ u\circ L_{p-i}=\sum_{i=0}^{p}\sigma\circ F_i\otimes *\circ L_{p-i}=\sigma\circ F_n\otimes *\circ L_0=\sigma\otimes *$$

である。これにより、$p_*\circ\times[\sigma\otimes *]=p_*[u]=[p\circ u]=[\sigma]$ である。$a\in H_p(X)$, $b\in H_0(Y)$ に対し、$(1\otimes z_*)(a\otimes b)=a\otimes\varepsilon(b)[*]$ であるので、

$$p_*(a\times b)=\varepsilon(b)p_*[a\times *]=\varepsilon(b)a$$

□

命題 0.15. 積球面のホモロジー群 $H_p(S^n\times S^m)$ を考えると、$n\neq m$ のとき、

$$H_p(S^n\times S^m)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=0,n,m,n+m,\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

$n=m$ のとき、

$$H_p(S^n\times S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=0,2n,\\ \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z} & p=n,\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

Proof. $H_p(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=0,n,\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$

であるので、$H_*(S^n)$ は自由である。よって Künneth の公式により、

$$H_*(S^n\times S^m)\cong H_*(S^n)\otimes H_*(S^m)$$

である。ここで、$n\neq m$ に対し、$H_p(S^n)\cong\mathbb{Z}$ であるのは、$p=0,n$ であり、$H_p(S^m)\cong\mathbb{Z}$ であるのは、$p=0,m$ である。であるので、これらの和の組み合わせのみ $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$ となり、そのほかは 0 であるため、

$$H_p(S^n\times S^m)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=0,n,m,n+m,\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

また、$n=m$ のときは、上と同様に考えると $p=n$ のときに重複が起こり、

$$(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z})\oplus(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

となるため、

$$H_p(S^n\times S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & p=0,2n,\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & p=n,\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

□