テンソル積

二つの加群 A と B が与えられたとき、A と B の積を考えたい。しかし、これは圏論的な意味での直積とは違う。テンソル積 $A \otimes B$ は加群の圏におけるモノイド構造である。このモノイド圏におけるモノイドが環（代数）である。

1　加群のテンソル積

テンソル積は双線形写像における一意性によって定義されるが、ここでは具体的に定義する。

定義 1.1. A, B を加群とする。群ではなく集合としての $A \times B$ から生成される自由加群 $\mathbb{Z}(A \times B)$ を考え、さらにその部分群 $F(A \times B)$ を、以下の形の元から生成される部分群とする。

1. $(na_1 + ma_2, b) - n(a_1, b) - m(a_2, b)$
2. $(a, nb_1 + mb_2) - n(a, b_1) - m(a, b_2)$

このとき、商群 $\mathbb{Z}(A \times B)/F(A \times B) = A \otimes B$ とかく。また、$(a, b) \in A \times B$ で表される代表元を $a \otimes b$ とかく。定義の仕方から明らかに次のことが成り立つ。

1. $(na_1 + ma_2) \otimes b = n(a_1 \otimes b) + m(a_2 \otimes b)$
2. $a \otimes (nb_1 + mb_2) = n(a \otimes b_1) + m(a \otimes b_2)$

注意 1.2. $A \otimes B$ の元は、$\sum r_i a_i \otimes b_i$, $(r_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A, b_i \in B)$ と表せる。ただし、これは一意的ではない。つまり、$A \otimes B$ は自由とは限らない。

テンソル積の定義よりもむしろ重要なのは以下の一意性に関する事実である。

定理 1.3. C を加群とし、写像 $f : A \times B \longrightarrow C$ は双線形写像とする。つまり、$f(na + ma', b) = nf(a, b) + mf(a', b)$, $f(a, nb + mb') = nf(a, b) + mf(a, b')$ を満たすとする。このとき、準同型 $\tilde{f} : A \otimes B \longrightarrow C$ が存在し、

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & C \\
& A \otimes B \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが一意に存在する。ただし、$p(a, b) = a \otimes b$ で与えられる射影である。

証明 f から誘導される準同型 $\mathbb{Z}(A \times B) \longrightarrow C$ の核が $F(A \times B)$ であるから、$A \otimes B \longrightarrow C$ で条件を満たす写像が一意的に得られる。 □

注意 1.4. 逆に定理1.3で言うように、写像 $p : A \times B \longrightarrow A \otimes B$ が付随し、任意の双線形写像 $f : A \times B \longrightarrow C$ に対し、$\tilde{f} \circ p = f$ を満たす準同型 $\tilde{f} : A \otimes B \longrightarrow C$ が一意に存在するような加群を A と B テンソル積と定義しても良い。一意性から、このような加群は同型をのぞいて一意的に存在する。

では、テンソル積の性質を少しみてみる。

定義 1.5. $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow D$ という準同型に対し、$f \otimes g : A \otimes B \longrightarrow C \otimes D$ が、$a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$ により定義される。

補題 1.6. A を加群としたとき、$\mathbb{Z} \otimes A \cong A \otimes \mathbb{Z} \cong A$ である。

証明 $\mathbb{Z}\otimes A\longrightarrow A$ が、$1\otimes a\mapsto a$ によって与えられる。これが同型を与える。 □

つまり、$\mathbb{Z}$ が $\otimes$ という積における単位元に相当する。

補題 1.7. A,B,C を加群としたとき、$A\otimes(B\otimes C)\cong(A\otimes B)\otimes C$ である。

証明 $A\otimes(B\otimes C)\longrightarrow(A\otimes B)\otimes C$ を、$a\otimes(b\otimes c)\mapsto(a\otimes b)\otimes c$ で定義すれば同型である。 □

これはつまり、$\otimes$ の結合則が成り立ってることを意味している。最後に可換性である。

補題 1.8. $A\otimes B\cong B\otimes A$ である。

証明 $A\otimes B\longrightarrow B\otimes A$ を、$a\otimes b\mapsto b\otimes a$ で定義すれば同型である。 □

以上の補題が言うところは、$\otimes$ により加群の圏が対称モノイド圏であるということである。この圏におけるモノイド対象が環である。さらにこのテンソル積が優れているのは、カルテシアン閉と呼ばれる写像加群との関連が深いところである。

定義 1.9. A,B を加群としたとき、$\mathrm{Hom}(A,B)$ を A から B への準同型全体の集合とする。この集合には、$(nf+mg)(a)=nf(a)+mg(a)$ により加群の構造が定義できる。$f:A\longrightarrow C$ に対し、準同型 $f^*:\mathrm{Hom}(C,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}(A,B)$ が、$\varphi\mapsto\varphi\circ f$ が定義できる。また、$g:B\longrightarrow D$ に対し、準同型 $g_*:\mathrm{Hom}(A,B)\longrightarrow\mathrm{Hom}(A,D)$ が、$\varphi\mapsto g\circ\varphi$ が定義できる。

定理 1.10. A を加群とする。このとき、

$$-\otimes A:\mathbf{Abel}\Longleftrightarrow\mathbf{Abel}:\mathrm{Hom}(A,-)$$

は随伴である。

証明 B,C を加群としたとき、

$$\mathbf{Abel}(B\otimes A,C)\longrightarrow\mathbf{Abel}(B,\mathrm{Hom}(A,C))$$

を次の対応で与える。まず、定理 1.3 により、$f:B\otimes A\longrightarrow C$ から、双線形写像 $g:B\times A\longrightarrow C$ を得る。ここから、$\mathrm{ad}(g):B\longrightarrow\mathrm{Hom}(A,C)$ が、$\mathrm{ad}(g)(b)(a)=g(b,a)$ により定義される。これは双線形写像の定義から準同型であり、$f\mapsto\mathrm{ad}(g)$ の対応が全単射であることは、定理 1.3 から従う。 □

加群のテンソル積と直和の間には、分配法則が成り立つ。

命題 1.11. $\{A_\lambda\}$, $\{B_\mu\}$ をそれぞれ加群の族とする。

$$\left(\bigoplus_\lambda A_\lambda\right)\otimes\left(\bigoplus_\mu B_\mu\right)\cong\bigoplus_{\lambda,\mu}(A_\lambda\otimes B_\mu)$$

証明 $B=\bigoplus_\mu B_\mu$ とおく。$-\otimes B:\mathbf{Abel}\longrightarrow\mathbf{Abel}$ は定理 1.10 により左随伴なので、直和を保つ。つまり、$(\bigoplus_\lambda A_\lambda)\otimes B\cong\bigoplus_\lambda(A_\lambda\otimes B)$ である。$B=\bigoplus_\mu B_\mu$ で再度議論を繰り返すと、題意が示される。 □

2 鎖複体のテンソル積

まずは次数付きの加群に対してテンソル積を定義する。

定義 2.1. C,D を次数付き加群とする。

$$(C\otimes D)_n=\bigoplus_{p+q=n}C_p\otimes D_q$$

で定義することにより、次数付き加群 $C\otimes D$ を得る。

定義 2.2. 次数付き加群の間の準同型 $f : C \longrightarrow C'$ が r-準同型とは、$f : C_n \longrightarrow C'_{n+r}$ という写像の族である。C, C', D, D' を次数付き加群、$f : C \longrightarrow C'$ を r-準同型、$g : D \longrightarrow D'$ を s-準同型とする。

$$\bigoplus_{p+q=n} f_p \otimes g_q : \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} C'_{p+r} \otimes D'_{q+s}$$

なので、$(f \otimes g)_n : (C \otimes D)_n \longrightarrow (C' \otimes D')_{n+r+s}$ を与える。よって、

$$f \otimes g : C \otimes D \longrightarrow C' \otimes D'$$

は $(r+s)$-準同型である。

定義 2.3. C, D を鎖複体に対し、次数 -1 の準同型

$$\partial : C \otimes D \longrightarrow C \otimes D$$

を次で定義する。$c \in C_p$, $d \in D_q$ に対し、

$$\partial(c \otimes d) = \partial(c) \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial(d)$$

とする。

命題 2.4. $(C \otimes D, \partial)$ は鎖複体である。

証明

$$\begin{aligned} \partial\partial(c \otimes d) =& \partial(\partial(c) \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial(d)) \\ =& \partial\partial(c) \otimes d + (-1)^{p-1}\partial(c) \otimes \partial(d) + (-1)^p \partial(c) \otimes \partial(d) + (-1)^{2p} c \otimes \partial\partial(d) \\ =& 0 \end{aligned}$$

□

命題 2.5. 鎖写像 $\varphi : C \longrightarrow C'$, $\psi : D \longrightarrow D'$ に対し、

$$\varphi \otimes \psi : C \otimes D \longrightarrow C' \otimes D'$$

は鎖写像である。

証明 $c \in C_p, d \in D_q$ に対し、

$$\begin{aligned} \partial \circ (\varphi \otimes \psi)(c \otimes d) =& \partial(\varphi(c) \otimes \psi(d)) \\ =& \partial \circ \varphi(c) \otimes \psi(d) + (-1)^p \varphi(c) \otimes \partial \circ \psi(d) \\ =& \varphi \circ \partial(c) \otimes \psi(d) + (-1)^p \varphi(c) \otimes \psi \circ \partial(d) \\ =& (\varphi \otimes \psi)(\partial(c) \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial(d)) \\ =& (\varphi \otimes \psi) \circ \partial(c \otimes d) \end{aligned}$$

□

命題 2.6. 鎖写像 $\varphi, \varphi' : C \longrightarrow C'$, $\psi, \psi' : D \longrightarrow D'$ に対し、$\varphi \simeq \varphi'$, $\psi \simeq \psi'$ ならば、$\varphi \otimes \psi \simeq \varphi' \otimes \psi'$ である。

証明 $\varphi \simeq \varphi'$, $\psi \simeq \psi'$ より、それぞれの鎖ホモトピーを $H : C \longrightarrow C'$, $G \longrightarrow G'$ をすると、これらは次数 1 の準同型である。ここで、次数 1 の準同型、

$$C \otimes D \longrightarrow C' \otimes D'$$

を、$c \otimes d \in C_p \otimes D_q$ に対し、$c \otimes d \mapsto (H_p \otimes \psi'_q + (-1)^p \varphi_p \otimes G_q)(c \otimes d)$ により定義すれば、これが、$\varphi \otimes \psi \simeq \varphi' \otimes \psi'$ を与える鎖ホモトピーである。 □