0.1　ホモトピーの完全列

fiber bundle の基本的な性質を調べたところで、そろそろ完全列の話に入っていかなければ。無論、以前にやった対空間のホモトピー完全列と言うのがあった。ただ、対空間と言うのは扱いにくいので、被約ホモロジー群の時のように対空間の出ない完全列と言うのを考えたいね。

Theorem 0.1.1

$p : E \longrightarrow B$ が、fiber を F にもつ fiber bundle とする。B が基点つき CW complex でその基点を $*$ とし、$e_0 \in F$ に対し、

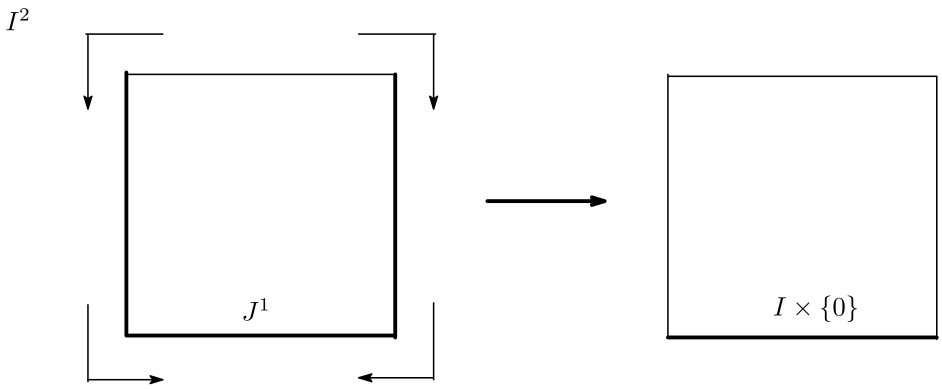
$$p_* : \pi_n(E, F, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, *)$$

は $n \geqq 2$ で全単射。

proof)　　まずは全射から示す。　$[f] \in \pi_n(B, *)$　をとると、

$$f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (B, *, *)$$

と見なせる。ここで対の同相　$(I^n, J^{n-1}) \cong (I^n, I^{n-1} \times \{0\})$　があることに注意する。写像を具体的に構成すると大変だが、$n = 2$ ぐらいで絵で見るとこんな感じ。



これより、定値写像　$e_0 : I^{n-1} \times \{0\} \longrightarrow E$　を用いて、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} J^{n-1} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

無論 $I^{n-1}\times\{0\}$ と J^{n-1} は同一視している。これより、CHP から、

$$\begin{tikzcd} J^{n-1} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

を可換にする $\tilde{f}$ の存在が言える。

つまり、 $\tilde{f}|_{I^{n-1}\times\{0\}} = \tilde{f}|_{J^{n-1}} = e_0 \ \ , \ \ p\circ\tilde{f} = f$

また、 $p\circ\tilde{f}(\partial I^n) = f(\partial I^n) = *$ 　　これより、 $\tilde{f}(\partial I^n) \subset p^{-1}(*) = F$

$$\therefore \quad \tilde{f} \ : \ (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (E, F, e_0)$$

であり、$p_*[\tilde{f}] = [p\circ\tilde{f}] = [f]$

次に単射を示す。 $[f]\ ,\ [g] \in \pi_n(E,F,e_0)$ に対し、$p_*[f] = p_*[g]$ とする。

$$\therefore \quad p\circ f \simeq p\circ g \qquad \text{これより、}$$

${}^{\exists}H \ : \ (I^n\times I, \partial I^n\times I, J^{n-1}\times I) \longrightarrow (B,*,*)$ 　　s.t

$$H(x,0) = p\circ f(x) \ \ , \ \ H(x,1) = p\circ g(x)$$

ここで、 $K^n = I^n\times\{0\}\cup I^n\times\{1\}\cup J^{n-1}\times I \subset I^n\times I$ とおく。やはり対の同相

$$(I^n\times I, K^n) \cong (I^n\times I, I^n\times\{0\})$$

に注意し、これを同一視する。

$$h \ : \ K^n \longrightarrow E$$

を、 $h|_{I^n\times\{0\}} = f \ \ , \ \ h|_{I^n\times\{1\}} = g \ \ , \ \ h|_{J^{n-1}\times I} = e_0$

で定義すると、これは連続であり、明らかに次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n\times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

やはり、CHP より、

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

を可換にする $\widetilde{H}$ の存在が言える。

$$\text{つまり、}\qquad \widetilde{H}|_{K^n} = h \ \ , \ \ p \circ \widetilde{H} = H$$

$$\text{これより、}\qquad \widetilde{H}|_{I^n\times\{0\}} = f \ \ , \ \ \widetilde{H}|_{I^n\times\{1\}} = g \ \ , \ \ \widetilde{H}|_{J^{n-1}\times I} = e_0$$

は簡単にわかる。そして、

$$p \circ \widetilde{H}(\partial I^n \times I) = H(\partial I^n \times I) = *$$

なので、　$\widetilde{H}(\partial I^n \times I) \subset p^{-1}(*) = F$　がわかり、以上より、

$\widetilde{H}\ :\ (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \longrightarrow (E, F, e_0)$　　で、f と g を繋ぐホモトピー

$\therefore$　　$[f] = [g]$　 in 　$\pi_n(E, F, e_0)$　　　□

Remmark 0.1.2

$p\ :\ E \longrightarrow B$ が、fiber を F にもつ fiber bundle とする。B が基点 $*$ を持つ CW complex で、$i\ :\ F \longrightarrow E$　 inclusion に対し、次が完全。

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E)$$

proof)　　Th **??**の対空間 (E, F) でのホモトピー完全列と Th **??**を使えば、簡単。

ここで、$\pi_1(E)$ の先に $\pi_1(B)$ があるのではと気になるが、対空間の完全列と Th **??** を使う以上 $n \geqq 2$ までしか言えない。これを示すには、実際にやるしかない。

Proposition 0.1.3

$p : E \longrightarrow B$ が、fiber を F にもつ fiber bundle とする。B が基点 $*$ を持つ CW complex で、$i : F \longrightarrow E$　inclusion に対し、

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \quad : \ \text{exact} \qquad (n \geqq 1)$$

proof)　F の定義から、　$p \circ i(F) = \{*\}$　なので、　$p \circ i = *$

$$\therefore \quad p_* \circ i_* = (p \circ i)_* = 0 \quad なので、\quad \mathrm{Im}\ i_* \subset \mathrm{Ker}\ p_*$$

逆の包含関係を示す。　$[f] \in \pi_n(E)$　に対し、　$p_*[f] = 0$　とする。

$$\therefore \quad p \circ f \simeq * \quad なので、$$

$^{\exists}H : S^n \times I \longrightarrow B \quad s.t \quad H(x,0) = p \circ f(x) \ , \ H(x,1) = * \ , \ H(*,t) = *$

つまり、次の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
S^n \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\
S^n \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}$$

これより、基点つき CHP を用いて、

$$\begin{tikzcd}
S^n \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\
S^n \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "^{\exists}\widetilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

を可換にする基点を保つホモトピー $\widetilde{H}$ が存在。

$$つまり、\quad \widetilde{H}|_{S^n \times \{0\}} = f \ , \ p \circ \widetilde{H} = H \ , \ \widetilde{H}(\{*\} \times I) = *$$

ここで、　$g = \widetilde{H}|_{S^n \times \{1\}}$　とおくと、

$$p \circ g = p \circ \widetilde{H}|_{S^n \times \{1\}} = H|_{S^n \times \{1\}} = *$$

$g(S^n) \subset p^{-1}(*) = F$　なので、　$[g] \in \pi_n(F)$　であり、

$$i_*[g] = [i \circ g] = [f] \qquad \therefore \quad \mathrm{Ker}\ p_* \subset \mathrm{Im}\ i_* \qquad \square$$

Theorem 0.1.4

$p : E \longrightarrow B$ が、fiber を F にもつ fiber bundle とする。B が基点 $*$ を持つ CW complex ならば、次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B)$$

さらに、$\pi_1(B)$ のその先はとか考えるでしょうか。まぁ、普通にいくと π_0 に落ちるのですが、π_0 は集合なので、群の完全列には組み込めません。もちろん集合の完全列と言う考えもありますけど。ここではあくまで群の完全列で考える。

Proposition 0.1.5

Th **??** の仮定の下、F : 弧状連結ならば、

$$p_* : \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B) \qquad \text{は全射}$$

proof)　　$[f] \in \pi_1(B)$　とすると、

$$f : I \longrightarrow B \quad で、\quad f(0) = f(1) = *$$

$e_0 \in F$　に対し、　$e_0 : \{*\} \times \{0\} \longrightarrow E$　を、e_0 への定値写像とすると、

$$\begin{tikzcd} \{*\} \times \{0\} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \{*\} \times I \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

は可換となる。もう当然のように CHP を使えば、

$$\begin{tikzcd} \{*\} \times \{0\} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \{*\} \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "^{\exists}\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

を可換にする $\tilde{f}$ の存在が言えるので、　$\tilde{f}(0) = e_0$, $p \circ \tilde{f} = f$

あとは、　$\tilde{f}(1) = e_0$　が言えればいいのだが、そうとも限らない。ところで、

$$p \circ \tilde{f}(1) = f(1) = * \quad \text{なので、} \quad \tilde{f}(1) \in p^{-1}(*) = F$$

ここで、F : 弧状連結より、

$$^{\exists}\alpha \ : \ I \longrightarrow F \qquad s.t \qquad \alpha(0) = \tilde{f}(1) \ , \ \alpha(1) = e_0$$

ここで、　$g = \tilde{f} + \alpha \ : \ I \longrightarrow E$　は、　$g(0) = g(1) = e_0$　である。

$$\therefore \qquad [g] \in \pi_1(E)$$

であり、　$p_*[g] = [p \circ (\tilde{f} + \alpha)] = [p \circ \tilde{f} + p \circ \alpha] = [p \circ \tilde{f}] = [f]$　　□

つまり、最終的に言えば次の定理にたどり着く。

Theorem 0.1.6

$p \ : \ E \longrightarrow B$ が、fiber を F にもつ fiber bundle とする。B が基点 $*$ を持つ CW complex で、F : 弧状連結ならば、次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B) \longrightarrow 0$$

この完全列があるからこそ、fiber bundle と言うのが重要なのである。Hopf fiber bundle が球面のホモトピー群に威力を発揮するのもわかっていただけるでしょうか。

Theorem 0.1.7

$$\pi_2(S^2) \cong \mathbf{Z} \quad \text{であり、} \quad \text{その生成元は、}[1_{S^2}] \quad \text{である。}$$

proof)　基本群の所で、　$\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$　の生成元が、$[1_{S^1}]$　であった。

S^2 : 基点付き CW complex なので、上の定理の完全列があるがその一部で、

$$\pi_2(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^3) \ : \ \text{exact}$$

$S^n : (n-1)$-connected　より、　$\pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = 0$　なので、

$$\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$$

ここで思い出すと、$p_* \ : \ \pi_2(S^3, S^1) \longrightarrow \pi_2(S^2)$　同型であるので、

対空間での連結準同型　$\partial \ : \ \pi_2(S^3, S^1) \longrightarrow \pi_1(S^1)$　も同型である。

$$f \ : \ (D^2, S^1) \cong (E^2_+, S^1) \xrightarrow{\subset} (S^3, S^1)$$

に対し、　$\partial[f] = [f|_{S^1}] = [1_{S^1}]$　であるため、$[f]$ が$\pi_2(S^3, S^1)$ の生成元である。

そして、$p \ : \ (E^2_+, S^1) \longrightarrow (S^2, *)$　なので、　$p_*[f] = [1_{S^2}]$　と見なせる。

$\therefore$　$\pi_2(S^2) \cong \mathbf{Z}$　の生成元は、$[1_{S^2}]$　□