ファイバー束

私たちが具体的に扱える空間というのは単純な空間が張り合わさった空間か、単純な空間が積み重なった空間であろう。前者にあたるのが多様体や胞複体などであるが、後者の場合には被覆空間、そしてこれから述べるファイバー束などが考えられる。

1　ファイバー束

被覆空間はファイバーが離散的であったが、ファイバーにも位相が入ると、ファイバー束という概念にいたる。

定義 1.1. $p : E \longrightarrow B$ がファイバー束とは、ファイバーと呼ばれる空間 F と、任意の $x \in B$ に対し、その近傍 $x \in U \subset B$ と、局所自明化写像、つまり同相

$$\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$$

で、次の図式を可換にするものが存在することである。

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

注意 1.2. 局所自明化を制限すると、$F \cong p^{-1}(x)$ となることがわかるので、F は任意の点でのファイバーと考えてよい。つまり、ファイバー束ではファイバーはすべて同相である。また、F が離散空間のとき、ファイバー束は被覆空間を意味して、その意味での一般化になっている。

命題 1.3. B, F を位相空間とし、$E = B \times F$ とおく。$p : E \longrightarrow B$ を第一成分への射影とすれば、これはファイバー束である。

証明 $x \in B$ に対し、$U = B$ とおけば、これは x の開近傍であり、$p^{-1}(U) = U \times F$ なので、局所自明化写像は恒等射として得られる。 □

このファイバー束を自明なファイバー束とよぶ。つまり単純に言うとファイバー束とは、局所的に見ると、全空間 E が底空間 B がファイバー F に沿って積み重なっていると言うことを意味している。

例 1.4. 球面を複素数 $\mathbf{C}$ を用いて表記すると、

- $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}$
- $S^2 = \{(a, z) \in \mathbf{R} \times \mathbb{C} \mid a^2 + |z|^2 = 1\}$
- $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$

と表せる。$p : S^3 \longrightarrow S^2$ を、$p(z_1, z_2) = \bigl(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z_2}\bigr)$ で定義すれば、これは S^1 をファイバーにもつファイバー束である。

証明 まず、p の像が定義域に収まっていることを確認するが、$(z_1, z_2) \in S^3$ に対し、

$$\begin{aligned} |p(z_1, z_2)| &= (2|z_1|^2 - 1)^2 + |2z_1\overline{z_2}|^2 \\ &= 4|z_1|^4 - 4|z_1|^2 + 1 + 4|z_1|^2|z_2|^2 \\ &= 4|z_1|^2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - 4|z_1|^2 + 1 \\ &= 4|z_1|^2 - 4|z_1|^2 + 1 = 1 \end{aligned}$$

となるため矛盾はない。つぎに S^2 の開被覆であるが、$S^2_+ = S^2 - \{(1,0)\}, S^2_- = S^2 - \{(-1,0)\}$ とおいたとき、これらを考える。次はそれらの局所自明化をみつけよう。とりあえず、S^2_+ で考える。

$$\varphi_+ : p^{-1}(S^2_+) \longrightarrow S^2_+ \times S^1$$

を、$\varphi_+(z_1, z_2) = \left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z_2}, \dfrac{z_2}{|z_2|}\right)$ で定義する。$\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_+ = p$ となるのは明らかである。あとは、これが同相であることを示せばよいが、この逆写像としては、

$$\psi_+ : p^{-1}(S^2_+) \times S^1 \longrightarrow p^{-1}(S^2_+)$$

が、$\psi_+(x,y,z) = \left(\dfrac{yz}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, z\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}\right)$ により与えられる。S^2_- においても同様である。 □

上記のファイバー束 $S^1 \longrightarrow S^3 \longrightarrow S^2$ は、Hopf-ファイバー束と呼ばれるものである。

定義 1.5. 2つのファイバー束 $p : E \longrightarrow B, p' : E' \longrightarrow B'$ に対し、$g : B \longrightarrow B', f : E \longrightarrow E'$ の二つの連続写像が、次の図式を可換にするとする。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow[g]{} & B' \end{array}$$

このとき、二つの写像の組をファイバーを保つ写像と呼び、$(f,g) : (E,B) \longrightarrow (E',B')$ とかく。ファイバーを保つと呼ばれている理由は、f の制限写像 $p^{-1}(x) \longrightarrow (p')^{-1}(g(x))$ を得るからである。

定義 1.6. $(f,g) : (E,B) \longrightarrow (E',B')$ が写像が、${}^\forall x \in B$ に対し、

$$f_{|p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \longrightarrow (p')^{-1}(g(x))$$

が同相であるとき、$(f,g) : (E,B) \longrightarrow (E',B')$ を束写像と呼ぶ。特に、$B = B'$ のとき、$(f, 1_B) : (E,B) \longrightarrow (E',B)$ という束写像が存在するとき、2つのバンドルは同値という。

命題 1.7. $(f,1_B) : (E,B) \longrightarrow (E',B)$ を束写像とすると、f は同相写像である。

証明 各ファイバー上で同相ならば全体で同相であることを示せばよい。まず f が全単射を示す。$e' \in E'$ と取ると、$e' \in p'^{-1}(p'(e'))$ なので、$e \in p^{-1}(p'(e')) \subset E$ が存在し、$f(e) = e'$ であるため全射である。また $x,y \in E$ に対し、$f(x) = f(y)$ とする。ここで、$z = f(x) = f(y)$ とおくと、$p(x) = p'(z) = p(y)$ なので、$x,y \in p^{-1}(p'(z))$ である。また $f(x), f(y) \in (p')^{-1}(p'(z))$ なので、$f(x) = f(y)$ ならば、$x = y$ である。これより全単射がいえた。あとは逆写像 f^{-1} の連続性である。

さて、今2つのファイバー束があるので、$x \in B$ に対し、2つの開近傍 $x \in U_x, V_x$ がとれて、$\varphi : p^{-1}(U_x) \cong U_x \times F, \psi : p'^{-1}(V_x) \cong V_x \times F$ という局所自明化がとれる。ここで、$W_x = U_x \cap V_x$ とおけば、これまた x の開近傍であり、$\varphi : p^{-1}(W_x) \cong W_x \times F, \psi : (p')^{-1}(W_x) \cong W_x \times F$ となる。$\{W_x\}_{x\in B}$ は B の開被覆であり、$\{(p')^{-1}(W_x)\}_{x\in B}$ は E' の開被覆である。f^{-1} の連続性を示すには開被覆上での連続性を示せばよい。$g : W_x \times F \longrightarrow W_x \times F$ を、

$$W_x \times F \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} p^{-1}(W_x) \xrightarrow{f} p'^{-1}(W_x) \xrightarrow{\psi_x} W_x \times F$$

の合成で定義するとこれは連続である。$(x,y) \in W_x \times F$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 \circ g(x,y) &= p_1 \circ \psi_x \circ f \circ {\varphi_x}^{-1}(x,y) \\ &= p' \circ f \circ {\varphi_x}^{-1}(x,y) \\ &= p \circ {\varphi_x}^{-1}(x,y) \\ &= \mathrm{pr}_1(x,y) = x \end{aligned}$$

なので、第一成分は保つわけなので、$g(x,y) = (x, p_2 \circ g(x,y))$ である。$h : F \longrightarrow F$ を次の合成で定義する。

$$F = \{x\} \times F \xrightarrow{\psi_x^{-1}} p'^{-1}(x) \xrightarrow{f^{-1}} p^{-1}(x) \xrightarrow{\varphi_x} \{x\} \times F = F$$

ファイバー上では f は同相なので、これは連続である。$1_{W_x} \times h : W_x \times F \longrightarrow W_x \times F$ は、g の逆写像であり、次を可換とする。

$$\begin{tikzcd}
p'^{-1}(W_x) \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & W_x \times F \arrow[d, "1_{W_x} \times h"] \\
p^{-1}(W_x) \arrow[r, "\varphi_x"'] & W_x \times F
\end{tikzcd}$$

これにより、f^{-1} は連続である。 □

系 1.8. ファイバー束の同値は同値関係である。

証明 恒等写像は束写像なので反射律は満たす。また推移律も束写像の合成が束写像なので満たす。対象律は命題 1.7 に従う。 □

2　被覆ホモトピー性質

ファイバー束においても、被覆空間のときのように写像の持ち上げという議論ができる。

定理 2.1. $p : E \longrightarrow B, p' : E' \longrightarrow B'$ はファイバー束とする。$(f,g) : (E,B) \longrightarrow (E',B')$ をファイバーを保つ写像、$H : B \times I \longrightarrow B'$ は、$H(-,0) = g$ とする。このとき、B がコンパクトハウスドルフならば、$\widetilde{H} : E \times I \longrightarrow E'$ が存在し、$\widetilde{H}(-,0) = f$ でさらに、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
E \times I \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d, "p \times 1_I"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \times I \arrow[r, "H"'] & B
\end{tikzcd}$$

証明 証明の概要は被覆空間と同様である。$B \times I$ がコンパクトハウスドルフであるから、有限個に小さな細分を行い、p, p' の局所自明化を用いて持ち上げる。詳細は省略する。 □

さて、この定理において重要なのは底空間の良い分割である。良い分割を見つけるのにコンパクトハウスドルフまで要求しなくともよい。

定義 2.2. 位相空間 X がパラコンパクトであるとは、任意の X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対し、同じく X の開被覆 $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ が存在して次を満たす。

1. 任意の $\beta \in B$ に対し、$\alpha \in A$ が存在し、$V_\beta \subset U_\alpha$
2. $x \in X$ に対し、$x \in U$ という開集合が存在し、$U \cap V_\beta \neq \phi$ となる $\beta \in B$ は有限個である。

例 2.3. X がコンパクトならば、パラコンパクトである。

証明 X の開被覆から有限個が選び出せるので成立する。 □

例 2.4. X が CW 複体ならば、パラコンパクトである。

証明 $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ という開被覆を考えると、$x \in X$ に対し、$x \in e_\lambda$ という胞体を考えると、$\overline{e_\lambda} \cap U_\alpha \neq \phi$ となる α は有限個しかないのは、$\overline{e_\lambda}$ がコンパクトだからである。 □

パラコンパクトハウスドルフ空間ならば、「1 の分割」とよばれる良い分割を得る。それを用いればさきのホモトピーの持ち上げができる。

注意 2.5. 定理 2.1 の底空間の条件はパラコンパクトハウスドルフ空間としても成立する。

系 2.6. $p : E \longrightarrow B$ をファイバー束とし、次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

さらに、$H : X \times I \longrightarrow B$ は、$H(-, 0) = g$ とする。このとき、X がパラコンパクトハウスドルフならば、$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$ で、$\widetilde{H}(-, 0) = f$ となり、

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

が可換となる。

証明 $X \xrightarrow{=} X$ の自明なファイバー束を考えれば、定理 2.1 により示される。 $\square$

注意 2.7. 被覆空間の道の持ち上げは $X = *$、ホモトピーの持ち上げは、$X = I$ で考えたものである。