群の作用

群や環などの代数的対象があると、それが作用する対象というものも重要である。

1　群

まずは群の定義を集合と写像の言葉で書き換える。

定義 1.1. 集合 G がモノイドであるとは、次の 2 つの写像 $\mu : G \times G \longrightarrow G$ と、$e : * \longrightarrow G$ が与えられ次の条件を満たす。

1. $\mu \circ (\mu \circ 1_G) = \mu \circ (1_G \circ \mu) : G \times G \times G \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu\circ 1_G"] \arrow[d, "1_G\circ\mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd}$$

2. $\mu \circ (1_G, e) = \mu \circ (e, 1_G) = 1_G : G \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
& G \times G \arrow[dd, "\mu"] & \\
G \arrow[ur, "{(1_G,E)}"] \arrow[dr, "="'] & & G \arrow[ul, "{(e,1_G)}"'] \arrow[dl, "="] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

最初が結合則、次が単位元の存在に関する条件に対応している。$\mu(g, h) = gh$、$e(*) = e$ と書く。さらに、$\nu : G \longrightarrow G$ が与えられ、次の条件を見たせば、G を群と呼ぶ。

3. $\mu \circ (1_G \times \nu) \circ \Delta = \mu \circ (\nu \times 1_G) \circ \Delta = e \circ c : G \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
& G \times G \arrow[rr, "\nu\circ 1_G"] & & G \times G \arrow[dr, "\mu"] & \\
G \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & * \arrow[rr, "e"] & & G \\
& G \times G \arrow[rr, "1_G\circ\nu"'] & & G \times G \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

ただし、$\Delta : G \longrightarrow G \times G$ は $g \mapsto (g, g)$ で与えられる対角写像、$c : G \longrightarrow *$ は定置写像である。これが逆元の存在に関わることに対応しており、$\nu(g) = g^{-1}$ と書く。

さらに次が可換性にまつわることである。これを満たすとき、モノイドならば可換モノイド、群ならばアーベル群、あるいは加群と呼ぶ。

4. $\mu \circ t = \mu : G \times G \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "\mu"'] & & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

ただし、$t : G \times G \longrightarrow G \times G$ は $(g, h) \mapsto (h, g)$ で与えられる入れ替え写像である。

上記に出てくる写像たちをまとめて構造写像とよぶ。モノイド同士、あるいは群同士の間の準同型写像もこの構造写像との可換性で定義できる。

G, G' をモノイドとし、その構造写像を、$\mu : G\times G \longrightarrow G$, $\mu' : G'\times G' \longrightarrow G'$, $e : * \longrightarrow G$, $e' : * \longrightarrow G'$ とする。このとき、写像

$$f : G \longrightarrow G'$$

が準同型であるとは、$\mu' \circ (f \times f) = f \circ \mu$, $f \circ e = e'$ を満たすことである。

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "\mu"'] & G' \times G' \arrow[d, "\mu'"] \\ G \arrow[r, "f"'] & G' \end{tikzcd}$$

定義 1.2. 位相空間 X が位相モノイド（群）であるとは、X がモノイド（群）であり、その構造写像がすべて連続であるときの事を示す。通常の群も離散位相が入った位相群と解釈できる。位相群の部分群とは、部分空間であり、その構造写像の制限で部分群となっていることである。また、X, Y を位相群としたとき、

$$f : X \longrightarrow Y$$

が連続かつ、群の間の写像として準同型であるとき、f を位相群の間の準同型と呼ぶ。さらに f が同相であるとき、f を位相群の間の同型と呼ぶ。

例 1.3. $S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ は、$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i\theta\theta'}$ によって位相群となる。を $r : S^1 \longrightarrow SO(2)$ を

$$r(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で定義すると位相群の同型である。

定義 1.4.

G を位相群とし、X を位相空間とする。このとき、G の X へ左からの作用とは、連続写像 $\varphi : G\times X \longrightarrow X$ で次の条件を満たす時のことである。$\mu : G \times G \longrightarrow G$ を位相群の積とし、$e \in G$ を単位元とする。

1. $\varphi(e, x) = x$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "(e,1_X)"] \arrow[dr, "="'] & & G \times X \arrow[dl, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

2. $\varphi \circ (\mu \times 1) = \varphi \circ (1 \times \varphi)$

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mu\times 1_X"] \arrow[d, "1_G\times\varphi"'] & G \times X \arrow[d, "\varphi"] \\ G \times X \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

このとき、$\varphi(g, x) = g \cdot x$ とかく。同様の定義で右からの作用も定義できる。G の積が可換ならば、右・左をあまり意識する必要は無い。

例 1.5.

1. G を位相群としたとき、その積 $\mu : G \times G \longrightarrow G$ は G 自身への左（右）作用である。

2. G を位相群とし、$H \subset G$ を部分群とする。G の積の制限、

$$\mu_{|_{H\times G}} : H \times G \longrightarrow G$$

は H の G への左からの作用である。

3. X を位相空間とし、Σ_n を n 次の対称群とし、離散位相を入れて位相群とする。$X^n \times \Sigma_n \longrightarrow X^n$ を、

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

で定義するとこれは右からの作用である。

4. $S^2 = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid x^2 + |z|^2 = 1\}$ を考える。$S^1 \times S^2 \longrightarrow S^2$ を $e^{i\theta} \cdot (x, z) = (x, e^{i\theta} \cdot z)$ により定義するとこれは S^1 の S^2への 左からの作用である。イメージ的には球面を x 軸で回転させる作用である。

注意 1.6. 位相群 G の X の作用、$\varphi : G \times X \longrightarrow X$ の随伴を考えると、$\mathrm{ad}(\varphi) : G \longrightarrow \mathrm{Map}(X, X)$ という写像になるが、G が群で逆元を持つことから、$\mathrm{ad}(\varphi) : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ と考えられる。X が局所コンパクトハウスドルフ空間なら、$\mathrm{Homeo}(X)$ は写像の合成によって位相群となり、$\mathrm{ad}(\varphi)$ は準同型となる。

定義 1.7. G の X への作用、$G \times X \longrightarrow X$ において、$x \sim_G y$ を $g \in G$ が存在し、$x = g \cdot y$ を満たすと定義する。このとき、$X/\sim_G = X/G$ と書く。これを、X の G による軌道空間と呼ぶ。また、標準的な射影 $p : X \longrightarrow X/G$ を考えることができる。

次に $x \in X$ に対し、G の部分群

$$\mathrm{Iso}_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

で定義し、x の安定部分群と呼ぶ。これは、$f_x : G \longrightarrow X,\ g \mapsto g \cdot x$ という連続写像における一点 x の逆像 $f_x^{-1}(x)$ に一致するため、X がハウスドルフ空間ならば閉部分群である。

重要な作用を 2 つ述べる。

1. G の X への作用が推移的であるとは、$G/X = *$ であることである。つまり、任意の $x, y \in X$ に対し、$g \cdot x = y$ となる $g \in G$ が存在することである。

2. G の X への作用が自由であるとは、任意の $x \in X$ に対し、$\mathrm{Iso}_G(x) = \{e\}$ であることである。つまり、任意の $x \in X$ に対し、$g \cdot x = x$ ならば、$g = e$ となることである。

例 1.8.

1. 積による作用 $G \times G \longrightarrow G$ は自由かつ推移的である。

2. $S^1 \times S^2 \longrightarrow S^2$ の回転による作用は自由でも推移的でもない。実際 $x = (1, 0) \in S^2$ とすると、$\mathrm{Iso}_{S^1}(x) = S^1$ であるし、$S^2/S^1 \cong [-1, 1]$ である。

命題 1.9. G を局所コンパクトハウスドルフな位相群、H をその部分群とする。

$$\tilde{\mu} : G \times G/H \longrightarrow G/H$$

を $\tilde{\mu}(g, [h]) = [gh]$ で定義すると、これは推移的な作用である。

証明 $\mu : G \times G \longrightarrow G$ を積とすると、

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1 \times p"'] & G \arrow[d, "p"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\tilde{\mu}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

が可換になるため、射影 $p : G \longrightarrow G/H$ に対し、$1 \times p : G \times G \longrightarrow G \times G/H$ が等化写像ならば $\tilde{\mu}$ は連続だが、これは G の局所コンパクトハウスドルフ性より成り立つ。また、作用になっていることは簡単にわかり、任意の $[g], [h] \in G/H$ に対し、$hg^{-1} \in G$ を考えれば、

$$\tilde{\mu}(hg^{-1}, [g]) = [hg^{-1}g] = [h]$$

より、$[g] \sim_G [h]$ であるため推移的な作用である。 □

命題 1.10. G をコンパクトな位相群、X をハウスドルフ空間とし、G が X に推移的に作用しているとする。$x \in X$ に対し、$f : G/\mathrm{Iso}_G(x) \longrightarrow X$ を $f[g] = g \cdot x$ とすると、これは同相である。

証明 $g, h \in \mathrm{Iso}_{x_0}(G)$ に対し、

$$g \cdot x = h \cdot x = x$$

なので、f は矛盾無く連続である。また任意の $y \in X$ に対し、作用が推移的であることから $g \in G$ が存在し $g \cdot x = y$ である。つまり、$f[g] = g \cdot x = y$ なので、f は全射である。また、$[g], [h] \in G/\mathrm{Iso}_{x_0}(G)$ に対し、$f[g] = f[h]$ とする。つまり、$g \cdot x = h \cdot x$ なので、$h^{-1}g \cdot x = x$ であり、$h^{-1}g \in \mathrm{Iso}_{x_0}(G)$ となる。これより、$[g] = [h]$ である。よって単射も示せた。G がコンパクトなので $G/\mathrm{Iso}_{x_0}(G)$ もコンパクト、X がハウスドルフだから f は同相である。 $\square$