主 G 束

ファイバー束、あるいは被覆空間でもそうだったが、群の作用をこめて考えるというのが重要な場合が多い。特に G が空間 X に作用している場合、自然な射影 $X \longrightarrow X/G$ が考えられるが、本質的にこの形になっているファイバー束を主 G 束とよんで様々な研究がなされている。

1 主 G 束

ファイバー束の定義から B の開被覆 $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が存在し、各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、

$$p^{-1}(U_\lambda) \cong U_\lambda \times F$$

ということである。このとき開被覆の共通部分に着目する。$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$, $\varphi_\beta : p^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times F$ をそれぞれの局所自明化写像とする。このとき、

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times F \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times F$$

という同相写像を考えることができる。局所自明化の可換図を考えれば、

$$pr_1 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = x$$

で第一成分は動かさないので、制限をかければ、

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\{x\} \times F} : \{x\} \times F \longrightarrow \{x\} \times F$$

というわけで $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し、$\Phi_x^{\alpha\beta} : F \longrightarrow F$ が定義されたということである。局所自明の定義を考えれば、これは同相である。これより、

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

が定義できる。この集まり $\{\Phi^{\alpha\beta}\}$ を座標変換と呼ぶ。コンパクト開位相により、$\mathrm{Homeo}(F)$ は位相空間になり、さらに F が局所コンパクトハウスドルフなら随伴を考えて $\Phi^{\alpha\beta}$ は連続であり、$\mathrm{Homeo}(F)$ が写像の合成で位相群となる。以下 F は局所コンパクトハウスドルフと仮定する。

さて、座標変換というと多様体を思い描くが、実際のところそれほど大差ない。座標変換は回被覆の張り合わせの情報を与える。それを群 G の作用によって俯瞰するというのが、G 束であり、この G を構造群とよぶのである。単純に言えば、$U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$ の値域として $\mathrm{Homeo}(F)$ という位相群の考えているが、$U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G \subset \mathrm{Homeo}(F)$ というより小さな部分群で、張り合わせの情報を得られる場合は G が構造群である。

定義 1.1. $p : E \longrightarrow B$ をファイバー束とし、G を位相群とする。ファイバー上への G の作用 $\mu : G \times F \longrightarrow F$ が与えられ、この随伴の準同型を $\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$ とおく。任意の座標変換 $\Phi_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$ に対し、$\mathrm{ad}(\mu) \circ \phi_{\alpha,\beta} = \Phi_{\alpha,\beta}$ となる $\phi_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ が存在するとき、$p : E \longrightarrow B$ を G を構造群に持つファイバー束、または単に G 束とよぶ。

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \cap U_\beta \arrow[rr, "\Phi_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, dotted, "\phi_{\alpha,\beta}"'] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& G \arrow[ur, "\mathrm{ad}(\mu)"'] &
\end{tikzcd}$$

また、ファイバーへの G の作用が自由かつ、推移的であるとき、これを主 G 束とよぶ。

注意 1.2. 上記の定義が言っているのは、各ファイバー上で G 作用が与えられているとき、その張り合わせる部分でも G の作用が一致していて、G の作用が全空間へ持ち上げられることを意味している。よって、$G \times E \longrightarrow E$ が与えられ、そのファイバーへの制限が $G \times F \longrightarrow F$ というファイバーへの作用になることと同値である。主 G 束の場合には、この作用が自由かつ推移的なので、$G = G/\mathrm{Iso}(x) \cong F$ ということで、ファイバーは G と考えてよい。そしてそう見たときの G 作用は積で与えられているわけである。

命題 1.3. $p : E \longrightarrow B$ を主 G 束とし、$q : E \longrightarrow E/G$ を自然な射影とする。このとき、同相 $\tilde{p} : E/G \longrightarrow B$ が存在し、$\tilde{p} \circ q = p$ を満たす。

証明 $x \simeq_G y \in E$ とすると、$y = g \cdot x$ である。G の作用の制限は各ファイバーへの作用を与えるので、x, y は同じファイバーに属してる。よって、p は $\tilde{p} : E/G \longrightarrow B$ を誘導し、$\tilde{p} \circ q = p$ となる。これは全単射であることは容易に確認でき、$[e] \in U \subset E/G$ という開近傍に対し、$e \in q^{-1}(U) \subset E$ を考える。$p(e) \in V$ で $V \times F \cong p^{-1}(V)$ という開近傍が存在するため、$p(e) \in V \cap \tilde{p}(U)$, $e \in q^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) \cong W \times F$ と局所自明化を通じて考えることができる。W は B の開集合で、$p(e) \in W \subset \tilde{p}(U)$ なので、$\tilde{p}(U)$ は開集合となり、$\tilde{p}$ は開写像となる。 □

構造群を勘案することにより、例えばアニュラス $A = S^1 \times I$ とメビウス M の構造の違いを見ることができる。$A \longrightarrow S^1$, $M \longrightarrow S^1$ を帯部分を押しつぶす写像とすると、これはどちらも $I = [0, 1]$ をファイバーにもつファイバー束である。この違いを見るためには構造群を考える必要がある。

例 1.4.

1. $\mathrm{pr}_2 : B \times F \longrightarrow B$ を自明なファイバー束とすると、これは自明な群を構造群にもつファイバー束である。これは局所自明化が恒等射 $B \times F \xrightarrow{=} B \times F$ で与えられるため、座標変換は 1 つしかなく、$\Phi : B \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$ は $b \mapsto 1_F$ で与えられる。よって、そのイメージは自明な部分群に収まるからである。

2. 特に $A \longrightarrow S^1$ は自明な群を構造群に持つファイバー束である。

3. $M \longrightarrow S^1$ は $\mathbb{Z}_2$ を構造群にもつファイバー束である。これは、$\mathbb{Z}_2$ の M への作用を裏返すことにより与えれば、ファイバーへの作用は $\mathbb{Z}_2 \times I \longrightarrow I$、$(-1) \cdot t = 1 - t$ として得られる。しかしこれは主 $\mathbb{Z}_2$ 束ではない。

4. 射影 $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ は主 $\mathbb{Z}_2$ 束である。これは、$\mathbb{Z}_2 \times S^n \longrightarrow S^n$ への自由な作用が、$(-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$ により与えられ、$S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$ である事実による。

5. Hopf 束 $S^3 \longrightarrow S^2$ は主 S^1 束である。これは、上記の実射影空間と同じように、一般に $S^1 \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ が $\theta \cdot (z_1, \cdots, z_n) = (\theta z_1, \cdots, \theta z_n)$ により与えられ、$S^{2n+1}/S^1 \cong \mathbb{C}P^n$ なので、$\mathbb{C}P^1 = S^2$ より成り立つ。

定義 1.5. $p : E \longrightarrow B$, $p' : E' \longrightarrow B'$ を G 束とする。束写像 $(f, g) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$ で、f が G 作用を保つとき、つまり、$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ となるとき、これを G 束写像とよぶ。また、$B = B'$ で、$(f, 1) : (E, B) \longrightarrow (E', B)$ という G 束写像が存在するとき同型とよぶ。B 上の主 G 束の同型類の集合を $P_G(B)$ とかく。

この先の目標としては、$P_G(B)$ を分類することを考える。

注意 1.6. 引き戻しに関して、G 束の引き戻しは G 束である。それは、$p : E \longrightarrow B$ と、$f : X \longrightarrow B$ を考えた際に、$f^*(E) = E \times_B X$ は、$g \cdot (e, x) = (g \cdot e, x)$ という自然な作用を持つからである。もちろん、主 G 束の引き戻しも主 G 束であるし、ホモトピックな写像に関しては、同型な G 束が引き戻される。

2　普遍 G 束

被覆空間のとき同様、普遍束の構成とその引き戻しを考える。被覆空間の場合には、全空間の基本群が消えている場合を普遍被覆と呼んだ。ファイバー束の場合には、全空間のすべてのホモトピー群が消えている場合をさす。

定義 2.1. ファイバー束 $p : E \longrightarrow B$ が普遍束であるとは、任意の $n \geqq 0$ に対し、$\pi_n(E) = *$ となることである。

普遍 G 束の構成法を述べる。普遍 G 束の構成で有名なのは、Milner と Milgram の構成があるが、ここでは Milgram の構成のみ述べる。この構成法はバー構成という一般的な手法が用いられている。

定義 2.2. G を位相群、R を右 G 加群、L を左 G 加群とする。このとき、$B_n(R, G, L) = R \times G^n \times L$ と定義する。$d_i : B_n(R, G, L) \longrightarrow B_{n-1}(R, G, L)$, $s_j : B_n(R, G, L) \longrightarrow B_{n+1}(R, G, L)$ を次で定義する。

$$d_i(r, g_1, \cdots, g_n, \ell) = \begin{cases} (rg_1, g_2, \cdots, g_n, \ell) & i = 0 \\ (r, g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_n, \ell) & 1 \leqq i \leqq n-1 \\ (r, g_1, \cdots, g_{n-1}, g_n \ell) & i = n \end{cases}$$

$$s_j(r, g_1, \cdots, g_n, \ell) = (r, g_1, \cdots, g_i, e, g_{i+1}, \cdots, g_n, \ell)$$

これにより、$B(R, G, L)$ は単体的空間となる。G を積により、G 加群とみたとき、$|B(G, G, *)| = EG$ とおく。作用 $G \times B_n(G, G, *) \longrightarrow B_n(G, G, *)$ が、$G \times (G \times G^n) \longrightarrow G \times G^n$ が、$(h, (g, g_1, \cdots, g_n)) \mapsto (hg, g_1, \cdots, g_n)$ により与えられる。これは、自由な作用 $G \times EG \longrightarrow EG$ を引き起こす。この作用による軌道空間を $BG = EG/G$ と書く。$BG = |B(*, G, *)|$ でもある。射影、$p : EG \longrightarrow BG$ が考えられるが、これが普遍 G 束であることを以下で示していく。

まず $E_0G \subset E_1G \subset \cdots \subset EG$ という幾何学的実現のフィルトレーションを考える。このとき、

$$E_nG = \coprod_{k=0}^{n} \Delta^k \times G^k / \sim$$

という空間である。

定理 2.3. (G, e) は非退化な基点つきの位相群とする。このとき、$p : EG \longrightarrow BG$ は主 G 束である。

証明 n による帰納法で、$p_n : E_nG \longrightarrow B_nG$ がファイバー束であることを示す。まず、$n = 0$ のとき、$E_0G = G$, $B_0G = *$ なので、$p_0 : G \longrightarrow *$ は自明なファイバー束である。$p_{n-1} : E_{n-1}G \longrightarrow B_{n-1}G$ がファイバー束とする。このとき、

$$p_n : E_nG \longrightarrow B_nG$$

がファイバー束であることを示すが、を考える。まず B_nG の開被覆を見つけなければならない。仮定より、B_{n-1}の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ と、局所自明化、

$$\chi_\alpha : p_n^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times G$$

が存在する。また、$B_nG - B_{n-1}G$ は B_nG の open set であり、

$$\varphi : p_n^{-1}(B_nG - B_{n-1}G) = E_nG - E_{n-1}G \longrightarrow B_nG - B_{n-1}G$$

を、$\varphi[(g_0; t_1, \cdots t_n; g_1, \cdots, g_n] = ([t_1, \cdots t_n; g_1, \cdots, g_n], g)$ で定義すればこれは同相であり、局所自明化である。これで終われれば良いのだが、$B_{n-1}G$ が B_nG の開集合ではないので、残念ながら各 V_α は B_nG の開集合とは言えない。ここから、(G, e) が NDR 対であることを使う。$(G \times G, G \times \{e\} \cup \{e\} \times G = G \vee G)$ が NDR 対となり、$\left(G^n, \vee G^{n-1}\right)$ が NDR 対である。$(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ も NDR 対であり、結局

$$(G^n \times \Delta^n, \vee_n G^{n-1} \times \Delta^n \cup G^n \times \partial\Delta^n)$$

も NDR 対となる。$(\vee_n G^{n-1} \times \Delta^n \cup G^n \times \partial\Delta^n)$ は $B_{n-1}G$ に対応するので、$(B_nG, B_{n-1}G)$、そして $(E_nG, E_{n-1}G)$ が NDR 対である。この NDR 表現を (h,u), $(\tilde{h},\tilde{u})$ とする。

$$\begin{tikzcd} E_nG \times I \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "p_n \times 1_I"'] & E_nG \arrow[d, "p_n"] \\ B_nG \times I \arrow[r, "h"'] & B_nG \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_nG \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "p_n"'] & I \arrow[d, equal] \\ B_nG \arrow[r, "u"'] & I \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \times E_nG \times I \arrow[r, "1\times\tilde{h}"] \arrow[d, "\cdot\times 1_I"'] & G \times E_nG \arrow[d, "\cdot"] \\ E_nG \times I \arrow[r, "\tilde{h}"'] & E_nG \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times E_nG \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\cdot"'] & E_nG \arrow[d, "\tilde{u}"] \\ E_nG \arrow[r, "\tilde{u}"'] & I \end{tikzcd}$$

はすべて可換である。$r = h_1 : B_nG \longrightarrow B_nG$ とおけば NDR 表現の仮定より、$r(u^{-1}([0,1))) \subset B_{n-1}G$ であり、

$$r : u^{-1}([0,1)) \longrightarrow B_{n-1}G$$

が考えられる。V_α は $B_{n-1}G$ の開集合なので、$r^{-1}(V_\alpha) = U_\alpha$ とおけば、U_α は B_nG の開集合である。もちろん $B_nG \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ であるため、$\{U_\alpha, B_nG - B_{n-1}G\}$ が B_nG の開被覆である。V_α を U_α に変形した事で χ_α も変形しなければならない。$\tilde{r} = \tilde{h}_1 : E_nG \longrightarrow E_nG$ に対し、

$$\begin{tikzcd} p_n^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "p_n"'] & p_n^{-1}(V_\alpha) \arrow[d, "p_n"] \\ U_\alpha \arrow[r, "r"'] & V_\alpha \end{tikzcd}$$

は可換となる。そこで、

$$\varphi_\alpha : p_n^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

を、$\varphi_\alpha(x) = (p_n(x), \mathrm{pr}_2 \circ \chi \circ \tilde{r}(x))$ で定義する。これより、

$$\begin{tikzcd} p_n^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p_n"'] & & U_\alpha \times G \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

は可換である。あとは φ_α が同相であれば良いが、

$$\gamma_\alpha : p_n^{-1}(U_\alpha) \times G \longrightarrow p_n^{-1}(U_\alpha)$$

を、$\gamma_\alpha(x,g) = g(pr_2 \circ \chi_\alpha \circ \tilde{r}(x))^{-1}x$ と定義すると、これが逆写像である。また、G の E_nG への作用が自由かつ推移的なので、p_n は主 G 束である。 □

定理 2.4. EG は可縮な空間である。

証明 $H : EG \times I \longrightarrow EG$ を次のように定義する。$h : I \times I \longrightarrow I$ を、$h(t,s) = \min\{1, s+t\}$ とおく。$[g_0; t_1, \cdots t_n; g_1, \cdots g_n] \in E_nG$ に対し、

$$H([g_0; t_1, \cdots t_n; g_1, \cdots g_n], s) = [e; h(0,s), h(t_1,s), \cdots, h(t_n,s); g_0, g_1, \cdots, g_n]$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned} &H([g_0; t_1, \cdots t_n; g_1, \cdots g_n], 0) \\ &= [e; h(0,0), h(t_1,0), \cdots, h(t_n,0); g_0, g_1, \cdots, g_n] \\ &= [e; 0, t_1, \cdots, t_n; g_0, g_1, \cdots, g_n] \\ &= [g_0; t_1, \cdots, t_n; g_1, \cdots, g_n] \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned}
&H([g_0; t_1, \cdots t_n; g_1, \cdots g_n], 1) \\
&= [e; h(0,1), h(t_1, 1), \cdots, h(t_n, 1); g_0, g_1, \cdots, g_n] \\
&= [e; 1, 1, \cdots, 1; g_0, g_1, \cdots, g_n] \\
&= e
\end{aligned}$$

であるため、EG は e へ可縮である事がわかる。 □

系 2.5. (G, e) は非退化な基点つきの位相群とする。このとき、$p : EG \longrightarrow BG$ は普遍主 G 束である。

(G, e) が非退化な基点をもつ位相群というと制限が多いように思えるが、例えば有限群や、離散位相を入れた離散群は明らかに OK ですし、多様体の構造を持つ Lie 群もこれを満たします。