compact open topology という複雑な位相がある。これは連続写像の集合に導入する位相なのだが、とりあえず定義を見てとやかく言いましょう。

Definition 0.0.1

X, Y : 位相空間に対し、

$$\mathrm{Map}(X,Y) = \{\ f\ :\ X \longrightarrow Y \mid \mathrm{conti}\ \}$$

また、対空間に対しても、

$$\mathrm{Map}((X,A),(Y,B)) = \{\ f\ :\ (X,A) \longrightarrow (Y,B) \mid \mathrm{conti}\ \}$$

が、 $\mathrm{Map}(X,Y)$ の部分空間として定義され、X, Y : 基点つき位相空間に対し、

$$\mathrm{Map}_*(X,Y) = \mathrm{Map}((X,*),(Y,*))$$

と定義する。ちなみに、$\mathrm{Map}_*(X,Y)$ は C_* の定置写像を基点とする基点付き空間である。

以下では基本的に $\mathrm{Map}(X,Y)$ について考察していくのだが、同様の定義・命題・定理が基点つきの場合 $\mathrm{Map}_*(X,Y)$ でも成立することを確認して欲しい。

Definition 0.0.2

$\mathrm{Map}(X,Y)$ に対し、その部分集合、

$$W(K,U) = \{\ f\ :\ X \longrightarrow Y \mid f(K) \subset U\ \ ,\ \ K \subset X\ \ ,\ \ U \subset Y\ \}$$

で定義し、

$$B = \{\ W(K,U) \mid K\ :\ \text{compact in X}\ \ ,\ \ U\ :\ \text{open in Y}$$

とおき、これを準基底とし、$\mathrm{Map}(X,Y)$ に位相を導入する。この位相を $\mathrm{Map}(X,Y)$ の compact open topology と呼ぶ。これからは、特に断らない限り写像の空間には常に compact open topology が導入されているとする。

Definition 0.0.3

$f\ :\ X \times Y \longrightarrow Z$ に対し、

$$\mathrm{ad}(f)\ :\ X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)$$

を、$\mathrm{ad}(f)(x)(y) = f(x,y)$ で定義する。このとき、$\mathrm{ad}(f)$ を f の adjoint と呼ぶ。

Proposition 0.0.4

$f\ :\ X \times Y \longrightarrow Z$ に対し、

$$\mathrm{ad}(f)\ :\ X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z) \qquad \text{は連続である。}$$

proof) $\quad {}^{\forall}x \in X$ に対し、$\mathrm{ad}(f)$ が連続を示す。

$\mathrm{ad}(f)(x)$ の開近傍 $W(K,U)$ を取ると、$\mathrm{ad}(f)(x) \in W(K,U)$ より、

$$\mathrm{ad}(f)(x)(K) \subset U$$

つまり、 $f(\{x\} \times K) \subset U$ である。よって、

$$^{\forall}y \in K \text{ に対し、} f(x,y) \in U$$

ここで、f : 連続と、U : open より、

$$^{\exists}V_y\ :\ \text{open in } X\ ,\ ^{\exists}W_y\ :\ \text{open in } Y$$

s.t $\quad (x,y) \in V_y \times W_y\ ,\ \ f(V_y \times W_y) \subset U$

また、$K \subset \bigcup_{y \in K} W_y$ であり、K : compact から、

$$^{\exists}y_1\ ,\ y_2\ ,\ \cdots\ ,\ y_n \in K \qquad s.t \qquad K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$$

ここで、$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ とおくと、V は x の開近傍であり、

$$(z,w) \in V \times K \text{ に対し、} ^{\exists}y_i \in K \qquad \text{s.t} \qquad w \in W_{y_i}$$

よって、

$$\mathrm{ad}(f)(z)(w) = f(z,w) \in f(V \times W_{y_i}) \subset f(V_{y_i} \times W_{y_i}) \subset U$$

これにより、

$$\mathrm{ad}(f)(V)(K) \subset U$$

すなわち、$\mathrm{ad}(f)(V) \subset W(K,U)$ なので、$ad(f)$ は連続。 $\square$

Definition 0.0.5

$f\ :\ X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)$ に対し、

$$\mathrm{ad}^{-1}(f)\ :\ X \times Y \longrightarrow Z$$

を、$\mathrm{ad}^{-1}(f)(x,y) = f(x)(y)$ で定義する。

Proposition 0.0.6

$f\ :\ X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)$ に対し、Y : locally compact Hausdorff ならば、

$$\mathrm{ad}^{-1}(f)\ :\ X \times Y \longrightarrow Z \qquad \text{は連続である。}$$

proof)　　U : open in Z に対し、

$$(\mathrm{ad}^{-1}(f))^{-1}(U) = \{\ (x,y) \in X \times Y \mid f(x)(y) \in U$$

$(x,y) \in (\mathrm{ad}^{-1}(f))^{-1}(U)$ に対し、$f(x)\ :\ Y \longrightarrow Z$　は連続なので、

$$f(x)^{-1}(U)\ :\ \text{open in } Y$$

また、 $f(x)(y) \in U$ より、$y \notin Y - f(x)^{-1}(U)$: closed in Y である。ここで、locally compact Hausdorff は regular なので、

$${}^{\exists}V, V'\ :\ \text{open in } Y \qquad \text{s.t} \qquad y \in V\ \ ,\ \ (Y - f(x)^{-1}(U)) \subset V'\ \ ,\ \ V \cap V' = \phi$$

つまり、$\overline{V} \cap (Y - f(x)^{-1}(U)) = \phi$ であるので、$\overline{V} \subset f(x)^{-1}(U)$

ここで、Y : locally compact より、

$$y \in {}^{\exists}W\ :\ \text{open in } Y \qquad s.t \qquad \overline{W}\ :\ \text{compact}$$

ここで、$O = V \cap W$ とおけば、O は y の開近傍であり、

$$\overline{O}\ :\ \text{compact であり、} \overline{O} \subset f(x)^{-1}(U)$$

これにより、$W(\overline{O}, U)$: open in $\mathrm{Map}(Y,Z)$ であり、

$$(x,y) \in f^{-1}(W(\overline{O}, U)) \times O \subset (\mathrm{ad}^{-1}(f))^{-1}(U)$$

よって、 $\mathrm{ad}^{-1}(f)$ は連続である。　　　　$\square$

Proposition 0.0.7

X : locally compact Hausdorff ならば、

$$ev \ : \ \mathrm{Map}(X,Y)\times X \longrightarrow Y$$

を、$ev(f,x)=f(x)$ で定義するとき、これは連続。

proof)　　U : open in Y に対し、

$$ev^{-1}(U)=\{\ (f,x)\in \mathrm{Map}(X,Y)\times X \mid f(x)\in U\ \}$$

$(f,x)\in ev^{-1}(U)$ とすると、$f(x)\in U$ であり、f が連続から、$f^{-1}(U)$: open in X

よって、$x\notin X-f^{-1}(U)$: closed in X。ここで、X : locally compact Hausdorff は regular であり、Prop 0.0.6 を参考にすれば、

$$x\in {}^{\exists}V \ : \ \text{open} \qquad \text{s.t} \qquad \overline{V} \ : \ \text{compact} \ , \ \overline{V}\subset f^{-1}(U)$$

これより、

$$(f,x)\in W(\overline{V},U)\times V\subset ev^{-1}(U)$$

よって、ev : 連続　　　　　$\Box$

上で構成された写像

$$ev \ : \ \mathrm{Map}(X,Y)\times X \longrightarrow Y$$

を evaluation map と呼ぶ。

Theorem 0.0.8

X , Y : locally compact Hausdorff のとき、

$$\mathrm{ad}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\longrightarrow \mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z)) \quad \text{は同相。}$$

proof)　　Prop 0.0.7 より、

$$ev \ : \ \mathrm{Map}(X\times Y,Z)\times X\times Y \longrightarrow Z$$

は連続であり、さらに、Prop 0.0.4 から、

$$\mathrm{ad}(ev) \ : \ \mathrm{Map}(X\times Y,Z)\times X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)$$

も連続であり、もう一度 adjoint を考えると、

$$\mathrm{ad}(\mathrm{ad}(ev)) \ : \ \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$$

という連続写像が構成されるが、 $f \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ に対し、

$$\mathrm{ad}(\mathrm{ad}(ev))(f)(x)(y) = \mathrm{ad}(ev)(f, x)(y) = ev(f)(x, y) = f(x, y)$$

一方、 $\mathrm{ad}(f)(x)(y) = f(x, y)$ であるので、

$$\mathrm{ad}(\mathrm{ad}(ev)) = \mathrm{ad}$$

これにより、ad : 連続であり、同様にして、

$$\mathrm{ad}^{-1} : \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \longrightarrow \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$$

においては、

$$ev' \ : \ \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \times X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y, Z)$$
$$ev'' \ : \ \mathrm{Map}(Y, Z) \times Y \longrightarrow Z$$

が連続であり、

$$ev' \times 1_Y \ : \ \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \times X \times Y \longrightarrow \mathrm{Map}(Y, Z) \times Y$$

を考え、

$$ev'' \circ (ev' \times 1_Y) \ : \ \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \times X \times Y \longrightarrow Z$$

で adjoint を取ると、

$$\mathrm{ad}(ev'' \circ (ev' \times 1_Y)) \ : \ \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \longrightarrow \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$$

であるので連続、 $\mathrm{ad}(ev'' \circ (ev' \times 1_Y)) = \mathrm{ad}^{-1}$ であるのも同様に示せる。

これらが互いに逆写像になっているのは明らかであるので、同相である。 □

Theorem 0.0.9

位相空間 X, Y, Z において、Y : compact Hausdorff ならば、

$$sy \ : \ \mathrm{Map}(X, Y) \times \mathrm{Map}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, Z)$$

を $sy(f, g) = g \circ f$ で定義すれば、これは連続。

proof) $(f,g) \in \mathrm{Map}_*(X,Y) \times \mathrm{Map}_*(Y,Z)$ に対し、

$$sy(f,g) \in W(K,U) \ : \ \text{open in } \mathrm{Map}(X,Z)$$

とすると、 $g \circ f(K) \subset U$。つまり、$f(K) \subset g^{-1}(U)$

ここで、$g^{-1}(U)$: open , $f(K)$: compact で、Y : Hausdorff より、$f(K)$: closed in Y

Y : compact Hausdorff より、normal であるので、

$$^{\exists}V \ : \ \text{open in } Y \qquad s.t \qquad f(K) \subset V \subset \overline{V} \subset g^{-1}(U)$$

これより、 $(f,g) \in W(K,V) \times W(\overline{V},U) \subset sy^{-1}(W(K,U))$ □

上で構成された写像

$$sy \ : \ \mathrm{Map}(X,Y) \times \mathrm{Map}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(X,Z)$$

を synthetic map と呼ぶ。

Definition 0.0.10

$f \ : \ X \longrightarrow Y$ と、位相空間 Z に対し、

$$f_* \ : \ \mathrm{Map}(Z,X) \longrightarrow \mathrm{Map}(Z,Y)$$

を、 $f_*(g) = f \circ g$ で定義し、

$$f^* \ : \ \mathrm{Map}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(X,Z)$$

を、 $f^*(g) = g \circ f$ で定義すれば、

$$X \ : \ \text{compact Hausdorff ならば、} f_* \ : \ \text{連続}$$

であり、また、

$$Y \ : \ \text{compact Hausdorff ならば、} f^* \ : \ \text{連続}$$

であることが、synthetic map の連続性から導かれる。

Theorem 0.0.11

基点つき空間 X, Y と、$* \in A \subset X$: closed に対し、 $f \in \mathrm{Map}_*(X, Y)$ が、$f(A) = *$ であるとき、

$$\tilde{f} \ : \ X/A \longrightarrow Y$$

が唯一誘導されるため、

$$in \ : \ \mathrm{Map}((X, A), (Y, *)) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X/A, Y)$$

を、$in(f) = \tilde{f}$ で定義するとこれは連続。

proof) $f \in \mathrm{Map}((X, A), (Y, *))$ に対し、

$$in(f) \in W(K, U) \ : \ \text{open in } \mathrm{Map}_*(X/A, Y) \quad \text{とすると、}$$

$\tilde{f}(K) \subset U$: であり、 K : compact in X/A であるので、

$$p^{-1}(K) \ : \ \text{compact in } X$$

を示さなければならない。それには A : *closed* を用いて、

$$p \ : \ X \longrightarrow X/A$$

が closed map であることがわかり、

$$p^{-1}(K) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \quad \text{を開被覆とすると、}$$

$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda^c \subset p^{-1}(K)^c$ であり、 O_λ^c : closed から、

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} p(O_\lambda^c) \subset K^c$$

であり、さらに戻すと、

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} p(O_\lambda)$$

K : compact より、$^\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} p(O_{\lambda_i})$$

よって、

$$p^{-1}(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}$$

となり、$p^{-1}(K)$: compact $\square$

Theorem 0.0.12

位相空間 X, Y, Z において、Y : compact Hausdorff ならば、

$$\mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \cong \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$$

proof)　同相写像は次のように定義する。

$$\varphi \ : \ \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$$

を、 $f \ : \ X \wedge Y \longrightarrow Z$ に対し、

$$\varphi(f)(x)(y) = f(x \wedge y)$$

と定義する。これが連続であるのは、この φ をよく考えてみると、

$$p \ : \ X \times Y \longrightarrow X \wedge Y \quad \text{projection}$$

において、 $p \in \mathrm{Map}_*(X \times Y, X \wedge Y)$ であるので、

$$\varphi \ : \ \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \cong \{p\} \times \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \xrightarrow{sy} \mathrm{Map}_*(X \times Y, Z) \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$$

のため、 φ : 連続。また、

$$\chi \ : \ \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z)) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z)$$

を、 $g \ : \ X \longrightarrow \mathrm{Map}_*(Y, Z)$ に対し、

$$\chi(g)(x \wedge y) = g(x)(y)$$

で定義する。

$$\chi(g)(x \wedge *) = g(x)(*) = * \ \ , \ \ \chi(g)(* \wedge y) = g(*)(y) = *$$

なので、well definded はよい。これが連続を示すためにはやはり、 χ をよく観察してみると、

$$\mathrm{ad}^{-1}(g) \ : \ \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z)) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X \times Y, Z)$$

を思いだし、

$$\mathrm{ad}^{-1}(g) \ : \ X \times Y \longrightarrow Z$$

は、 $\mathrm{ad}^{-1}(g)(*, y) = \mathrm{ad}^{-1}(g)(x, *) = *$ であるため、

$$\widetilde{\mathrm{ad}^{-1}(g)} \ : \ X \wedge Y \longrightarrow Z$$

が誘導させる。これにより、

$$\chi \ : \ \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z)) \xrightarrow{\mathrm{ad}^{-1}} \mathrm{Map}_*((X \times Y, X \vee Y), (Z, *)) \xrightarrow{in} \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z)$$

であるため、連続である。また、φ , χ が互いに逆写像になっていることはすぐにわかる。よって、

$$\mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \cong \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z)) \qquad \square$$