では次に cofibration をもう少し深く探ってみよう。fibration の時の流れをもう一度繰り返します。fibration の章を理解すれば、ここは結果だけ目で追っていってもらえばよいと思いますが、一応、証明を繰り返しておきます。cofibration とは簡単に言うと、ある条件の写像が拡張可能ということ。それと関連したのは、push out という概念も重要です。

Definition 0.0.1

$$f \ : \ X \longrightarrow Y$$

に対し、

$$M_f = Y \coprod X \times I / \sim$$

で定義する。ただし、$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = (x, 0)$

これを、f の mapping cylinder とよぶ。

cofibration と mapping cylinder と言うのは非常に関係が深い。と言うのも次の写像、

$$i \ : \ X \longrightarrow M_f$$

$$r \ : \ M_f \longrightarrow Y$$

$$j \ : \ Y \longrightarrow M_f$$

をそれぞれ、　$i(x) = [x, 1]\ ,\ r([x, t]) = x\ ,\ j(y) = [x]$　で定義する。

このとき、以下のようなことが成り立つ。

Proposition 0.0.2

$$i \ : \ X \longrightarrow M_f \quad \text{cofibration}$$

proof)　　任意の位相空間 Z と、次の写像

$$g \ : \ M_f \longrightarrow Z \quad , \quad G \ : \ X \times I \longrightarrow M_f$$

に対し、次の図式が可換とする。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dd, "i"'] & & X \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd] \\
& Z & \\
M_f \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] & & M_f \times I
\end{tikzcd}
$$

ここで、 $\tilde{G} \,:\, M_f \times I \longrightarrow Z$ を次で定義する。

$$y \in Y \quad \text{のとき、} \quad \tilde{G}([y], t) = g([y])$$

$$(x,t) \in X \times I \quad \text{のとき、} \quad \tilde{G}([x,t], s) = \begin{cases} G(x, t(1+s) - 1) & \dfrac{1}{1+s} \leqq t \leqq 1 \\ g([x, t(1+s)]) & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{1+s} \end{cases}$$

これは、well defined かつ連続である。そして、

$$\tilde{G}([x,t], 0) = g([x,t]) \quad , \quad \tilde{G}([x,1], s) = G(x,s)$$

なので、$i_0 \circ \tilde{G} = g$, $i \times 1_I \circ \tilde{G} = G$ であり、

これより、 i : cofibration $\square$

Proposition 0.0.3

$j \,:\, Y \longrightarrow M_f$, $r \,:\, M_f \longrightarrow Y$ は互いに homotopy inverce

proof) $r \circ j = 1_Y$ なので、 $j \circ r \simeq 1_{M_f}$ を示す。

$$H \,:\, M_f \times I \longrightarrow M_f$$

を次で定義する。

$$y \in Y \quad \text{の時、} \quad H([y], s) = [y]$$

$$(x,t) \in X \times I \quad \text{のとき、} \quad H([x,t], s) = [x, ts]$$

これは、well defined かつ連続である。また、

$$H([y], 0) = [y] = i \circ r([y]) \quad , \quad H([x,t], 0) = [x, 0] = [f(x)] = i \circ r([x,t])$$

であり、

$$H([y],1) = [y] \quad , \quad H([x,t],1) = [x,t]$$

なので、$j \circ r \simeq 1_{M_f}$ $\square$

Proposition 0.0.4

$$i \ : \ Y \longrightarrow M_f \qquad \text{cofibration}$$

proof)　Z : 位相空間に対し、次の二つの写像、

$$g \ : \ M_f \longrightarrow Z \quad , \quad H \ : \ Y \times I \longrightarrow Z$$

が次の図式を可換にするとする。

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & Y \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd, "i"] \\
& Z & \\
M_f \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "i_0"'] & & M_f \times I
\end{tikzcd}$$

ここで、

$$\varphi \ : \ I \times I \longrightarrow I \times \{0\} \cup \{0\} \cup I$$

で、retraction が存在するので、これを用いて、

$$\widetilde{H} \ : \ M_f \times I \longrightarrow Z$$

を次で定義する。

$$y \in Y \text{ のとき、} \widetilde{H}([y],s) = H(y,s)$$

$$(x,t) \in X \times I \text{ で、} \varphi(t,s) \in I \times \{0\} \text{ のとき、} \widetilde{H}([x,t],s) = g([x, p_1 \circ \varphi(t,s)])$$

$$\varphi(t,s) \in \{0\} \times I \text{ のとき、} \widetilde{H}([x,t],s) = H(f(x), p_2 \circ \varphi(t,s))$$

これが well defined で連続なのは確認してほしい。

$$\widetilde{H}([x,t],0) = g([x,t])$$

なので、

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & Y \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd, "i"] \\
& Z & \\
M_f \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "i_0"'] & & M_f \times I \arrow[ul, "\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}
$$

は可換になる。 $\square$

Definition 0.0.5

$f\ :\ X \longrightarrow Y$ に対し、cofibration

$$
i\ :\ X\ \longrightarrow M_f
$$

を構成することを、f を cofibration に取り替えると言う。

さて、勝手な連続写像から、cofibration を構成する方法がこれである。以前に習った push out と似ているようで微妙に違う。おっと、fibration の章を見返すと、この辺の文章はほぼコピペということがすぐにわかってしまいますな。手抜きです。姉歯氏設計によるグランドステージ杉浦ぐらい手抜きです。さて、fibration で言うとこの後の流れは fiberwise equivalence でしたので、cofiberwise equivalence を定義しましょう。

Definition 0.0.6

$i\ :\ A \longrightarrow X \quad , \quad i'\ :\ A' \longrightarrow X' \quad$: cofibation に対し、

$$
f\ :\ A \longrightarrow A' \quad , \quad \tilde{f}\ :\ X \longrightarrow X'
$$

の二つの連続写像が、次の図式を図式にする。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\
X \arrow[r, "\tilde{f}"'] & X'
\end{tikzcd}
$$

このとき、二つの写像の組を cofiber を保つ写像 (cofiber-preserving map) と呼び、

$$(f, \tilde{f}) \ : \ (A, X) \longrightarrow (A', X')$$

とかく。

Definition 0.0.7

２つの cofiber を保つ写像

$$(f, \tilde{f}) \ , \ (g, \tilde{g}) \ : \ (A, X) \longrightarrow (A', X')$$

が cofiber homotopic あるいは、cofiberwise homotopic とは、

$$^{\exists}H \ : \ A \times I \longrightarrow A' \qquad s.t \qquad H(x,0) = f(x) \ \ , \ \ H(x,1) = g(x)$$

$$^{\exists}\widetilde{H} \ : \ X \times I \longrightarrow X' \qquad s.t \qquad \widetilde{H}(x,0) = \tilde{f}(x) \ \ , \ \ \widetilde{H}(x,1) = \tilde{g}(x)$$

の二つのホモトピーが存在して、次を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "i \times 1_I"'] & A' \arrow[d, "i'"] \\
X \times I \arrow[r, "\widetilde{H}"'] & X'
\end{tikzcd}$$

特に、上の状況下で $A = A'$ で、$f = g = 1_A$ でさらに、$H(x,t) = x$ において cofiber homotopic のとき、$\tilde{f} \overset{A}{\simeq} \tilde{g}$　とかき、A の元で homotopic と呼ぶ。

Definition 0.0.8

$i \ : \ A \longrightarrow X \quad , \quad i' \ : \ A \longrightarrow X'$: cofibration に対し、

次の cofiber を保つ写像、

$$(1_A, f) \ : \ (A, X) \longrightarrow (A, X') \ \ , \ \ (1_A, g) \ : \ (A, X') \longrightarrow (A, X)$$

で、

$$g \circ f \overset{A}{\simeq} 1_X \ \ , \ \ f \circ g \overset{A}{\simeq} 1'_X$$

となるものが存在するとき、 (A, X) と (A, X') は cofiber homotopy 同値あるいは、cofiberwise homotopy 同値とよび、$X \overset{A}{\simeq} X'$ とかく。また、このとき、f, g を cofiber homotopy equivalence と呼ぶ。

Remmark 0.0.9

$\overset{A}{\simeq}$ は cofibration における同値関係である。

Remmark 0.0.10

$X \overset{A}{\simeq} X'$ ならば、空間としてのホモトピー同値と言う意味で $X \simeq X'$ である。

なんというか、かつて見たことのある数式がづらづら。まさしくデジャヴ。デジャヴはまだまだ続きます。ところで、デジャヴはフランス語です。こう見えても私は大学時代に第二外国語としてフランス語を専攻していました。最近お気に入りのフランス語はメゾン。マンションのフランス語だと言うことを新鮮味を持って知りました。さすが「メゾン一刻」。メゾン一刻の登場人物をずらりと並べると、数列をなしています。一ノ瀬、二階堂、三鷹、四ッ谷、五代、六本木、七尾、八神、九条。もう気づきましたね。さて、管理人さんの苗字はなんだったかを思い出してください。

ところで、cofiberwise homotopy 同値であると何が良いのか？まぁ、色々いい事はあるのだろうが、一番はそれらの cofiber が homotopy 同値になるということである。

Proposition 0.0.11

$i : A \longrightarrow X,\ i' : A \longrightarrow X'$: cofibration

$$(A, X) \text{ と } (A, X') \text{ は cofiberwise homotopy 同値}$$

ならば、$X/A \simeq X'/A$ 　であり、その homotopy equivalence は，次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & X/A \arrow[d, "\simeq"] \\ A \arrow[r, "i'"'] & X' \arrow[r, "p'"'] & X'/A \end{tikzcd}$$

（ただし、f は定義より存在する cofiber を保つ写像で、p , p' は projection） proof)　(A, X) と (A, X') は cofiberwise homotopy 同値より、

$$^{\exists}f \,:\, X \longrightarrow X' \;\;,\;\; g \,:\, X' \longrightarrow X$$

s.t　$g \circ f \simeq 1_X \;\;,\;\; f \circ g \simeq 1_{X'} \;\;,\;\; f \circ i = i' \;\;,\;\; g \circ i' = i$

ここで、

$$f \,:\, X \longrightarrow X' \;\;,\;\; g \,:\, X' \longrightarrow X$$

は、$f(A) \subset A \;\;,\;\; g(A) \subset A$　を満たすので、

$$\tilde{f} \,:\, X/A \longrightarrow X'/A \;\;,\;\; \tilde{g} \,:\, X/A' \longrightarrow X/A$$

を誘導する。この写像が互いに homotopy inverce であることは容易にわかり、題意の可換図を成立させることもわかる。　□

Proposition 0.0.12

$i \,:\, A \longrightarrow X \;\;,\;\; j \,:\, A \longrightarrow Y$　cofibration

$f \,:\, X \longrightarrow Y$　homotopy equivalence が、次の図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

を可換にする時、f は cofiber homotopy equivalence である。

proof)　なんとなくノリで成立しそうな命題だがきちんと示すとなるとそれなりに骨が折れる。まず、写像が尋常なく大量に出てくるので、混乱しないように一つ一つ丁寧に見ていって欲しい。

示すべきことは、f の homotopy inverce で cofiber を保ち、その合成が恒等射と A の元で homotopic な写像を見つけることである。f はもともと homotopy equivalence なのだから、homotopy inverce を持つがそれが、後半の「cofiber を保つのと、A の元で」と言うのは定かではない。とはいえ、f の homotpy inverce からすべては始まるので、それを決めておこう。

$$^{\exists}g \,:\, Y \longrightarrow X \quad s,t \quad g \circ f \simeq 1_X \;,\; f \circ g \simeq 1_Y$$

$f \circ i = j$ より、 $g \circ j = g \circ f \circ i \simeq i$ $\therefore$ $g \circ j \simeq i$

ここで、$g \circ j$ と i を繋ぐ homotopyを H としておく。つまり、

$H \ : \ A \times I \longrightarrow X$ $H_0 = g \circ j \ , \ H_1 = i$ である。よって、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "j"'] & & A \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd, "j \times 1_I"] \\
& X & \\
Y \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "i_0"'] & & Y \times I
\end{tikzcd}$$

が、可換となり j : cofibration なので、

$$^{\exists}\widetilde{H} \ : \ Y \times I \longrightarrow X$$

で、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "j"'] & & A \times I \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd, "j \times 1_I"] \\
& X & \\
Y \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "i_0"'] & & Y \times I \arrow[ul, "\widetilde{H}"']
\end{tikzcd}$$

ここで、 $h = \widetilde{H}_1 \ : \ Y \longrightarrow X$ とおくと、

$$h \circ j = \widetilde{H}_1 \circ j = H_1 = i$$

であり、さらに $h \simeq g$ なので、次のような性質を持つ。

$$h \circ f \simeq 1_X \ , \ f \circ h \simeq 1_Y$$

これにより、cofiber を保つ f の homotopy inverce は構成できた。しかし、残念ながら、これらの合成と恒等射は A の元で homotopic とはいえないのだ。なので、もう少し変形を加える。

$h \circ f$ と 1_Xを繋ぐ homotopyを G とおく。つまり、

$G\ :\ X\times I\longrightarrow X \qquad G_0=h\circ f\ ,\ G_1=1_X$ である。よって、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A\times I \arrow[dl, "G\circ(i\times 1_I)"'] \arrow[dd, "i\times 1_I"] \\
& X & \\
X \arrow[ur, "="] \arrow[rr, "i_0"'] & & X\times I
\end{tikzcd}$$

の図式において、

$$G\circ(i\times 1_I)(a,0)=G(i(a),0)=h\circ f\circ i(a)=h\circ j(a)=i(a)$$

であるので、可換となり i が cofibration であることから、

$$^{\exists}\widetilde{G}\ :\ X\times I\longrightarrow X$$

で、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A\times I \arrow[dl, "G\circ(i\times 1_I)"'] \arrow[dd, "i\times 1_I"] \\
& X & \\
X \arrow[ur, "="] \arrow[rr, "i_0"'] & & X\times I \arrow[ul, "\widetilde{G}"']
\end{tikzcd}$$

ここで、　$k=\widetilde{G}_1\ :\ X\longrightarrow X$　とおくと、　$k\simeq 1_X$　である。

$$l\ :\ k\circ h\ :\ Y\longrightarrow X$$

が、実は欲している写像であることを今から示していく。まず、これが cofiber を保つかどうかであるが、h は保つことはもうすでに調べた。また、

$$k\circ i(a)=\widetilde{G}_1\circ i(a)=\widetilde{G}(i(a),1)=G(i(a),1)=G_1\circ i(a)=i(a)$$

であるため、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "="] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "i"] \\
Y \arrow[r, "h"'] & X \arrow[r, "k"'] & X
\end{tikzcd}$$

の図式は可換になるので、結局 l は cofiber を保つ。そして、気になる A の元での homotopic であるが、それを示す前に次の写像を与える。

$$\alpha \;:\; X \times I \longrightarrow X$$

を、　　$$\alpha(x,s) = \begin{cases} \widetilde{G}(h \circ f(x), 1-2s) & 0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{2} \\ G(x, 2s-1) & \dfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

で定義すると、これは well definded であることはすぐにわかる。そして、

$$\alpha(x,0) = \widetilde{G}(h \circ f(x), 1) = \widetilde{G}_1 \circ h \circ f(x) = k \circ h \circ f(x) = l \circ f(x)$$

$$\alpha(x,1) = G(x,1) = G_1(x) = x$$

なので、　$l \circ f \overset{\alpha}{\simeq} 1_X$　であるのだが、これがまだ A の元ではないのだ。そこでさらに、

$$\beta \;:\; A \times I \times I \longrightarrow X$$

を、　　$$\beta(a,s,t) = \begin{cases} \widetilde{G}(i(a), 1-2s(1-t)) & 0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{2} \\ G(i(a), 1-2(1-s)(1-t)) & \dfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

で定義すれば、とりあえず well definded は認められるのだが、これが一体何を表しているのかは全くの謎である。そして、この写像を初めに考え付いた人は偉大であったと賞賛する。まぁ、Peter May の本でようやく見つけたわけですが。とりあえず、

$$\beta(a,s,0) = \begin{cases} \widetilde{G}(i(a), 1-2s) & 0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{2} \\ G(i(a), 2s-1) & \dfrac{1}{2} \leqq s \leqq 1 \end{cases} \qquad = \alpha \circ i \times 1_I(a,s)$$

となるわけなので、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i \times 1_I"'] & & A \times I \times I \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dd, "i \times 1_I \times 1_I"] \\
& X & \\
X \times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \times I
\end{tikzcd}$$

さらに、$i \times 1_I$ は cofibration なので、

$$^{\exists}\gamma \ : \ X \times I \times I \longrightarrow X$$

で、次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i \times 1_I"'] & & A \times I \times I \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dd, "i \times 1_I \times 1_I"] \\
& X & \\
X \times I \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \times I \arrow[ul, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

ここで、この　$^{\exists}\gamma \ : \ X \times I \times I \longrightarrow X$　について、深く見てみよう。

図式より、明らかに、　$\gamma_{0,0} = \alpha_0 = l \circ f$ ， $\gamma_{1,0} = \alpha_1 = 1_X$

であり、

$$\gamma_{0,*} \circ (i \times 1_I)(a,t) = \gamma_{0,*}(i(a),t) = \gamma(i(a),0,t) = \beta(a,0,t) = \widetilde{G}(i(a),1) = k \circ i(a) = i(a)$$

$$\gamma_{*,1} \circ (i \times 1_I(a,s) = \gamma_{*,1}(i(a),s) = \gamma(i(a),s,1) = \beta(a,s,1) = i(a)$$

$$\gamma_{1,*} \circ (i \times 1_I(a,t) = \gamma_{1,*}(i(a),t) = \gamma(i(a),1,t) = \beta(a,1,t) = G(i(a),1) = i(a)$$

なので、これらを繋ぎ合わせると、A の元での homotopy が完成する。つまり、

$$l \circ f = \gamma_{0,0} \overset{A}{\simeq} \gamma_{0,1} \overset{A}{\simeq} \gamma_{1,1} \overset{A}{\simeq} \gamma_{1,0} = 1_X$$

で、　$l \circ f \overset{A}{\simeq} 1_X$　となる。さらに、$f \circ l \simeq 1_Y$ ではあるが今の議論を繰り返して、

$$k' \circ f \circ l \overset{A}{\simeq} 1_Y$$

であり、$k' \circ f \overset{A}{\simeq} f$ なので、$f \circ l \overset{A}{\simeq} 1_Y$　　　□

Proposition 0.0.13

$f \ : \ X \longrightarrow Y$　cofibration ならば、$i \ : \ X \longrightarrow M_f$　cofibration に対し、

$r \ : \ M_f \longrightarrow Y$　は cofiberwise homotopy equivalence proof)　　$r : M_f \longrightarrow Y$ は homotopy equivalence であり、

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
M_f \arrow[r, "r"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

の図式が可換になることより、prop **??**から成立。　　$\square$