Definition 0.0.1

$f\ :\ X \longrightarrow Y$ に対し、

$$i\ :\ X \longrightarrow M_f \quad \text{cofibration}$$

であるが、このとき、 $C_f = M_f/i(X)$ を、f のhomotopy cofiber と呼ぶ。
よって、projection

$$p\ :\ M_f \longrightarrow C_f$$

は連続写像なので、これをさらに cofibration に取り替えることが可能である。そう考えていくと、無限に cofibration の列ができる。さて、これからはこの列を深く考察していこう。

Definition 0.0.2

X : 位相空間に対し、

$$CX = X \times I/X \times \{1\}$$

で定義し、X の錐 (cone) と呼ぶ。また、

$$\Sigma X = X \times I/\sim \qquad \text{ただし、}(x,1) \sim (x',1) \text{ または、}(x,0) \sim (x',0)$$

で定義し、X の懸垂 (suspension) と呼ぶ。

Remmark 0.0.3

$f\ :\ X \longrightarrow Y$ に対し、f のhomotopy cofiber である C_f は、普通は mapping cone と呼ばれ、

$$C_f = Y \cup_X CX$$

で定義される。これが、前回での C_f の定義と同相になるのは感覚でわかると思う。

Proposition 0.0.4

$k\ :\ X \longrightarrow CX$ を、 $k(x) = [x,0]$ で定義すると、これは cofibration

proof) $q\ :\ X \longrightarrow \{x_0\}$: projection を cofibration で取り替えてみると、

$$i' : X \longrightarrow M_q$$

となるわけだが、

$$
\begin{aligned}
M_q &= \{x_0\} \coprod X \times I / \sim \qquad q(x) \sim (x, 0) \\
&= \{x_0\} \coprod X \times I / \{x_0\} \coprod X \times \{0\} \\
&\cong CX
\end{aligned}
$$

最後の同相は、上下を反転させる意味である。そう考えれば、i'は高さ 1 への inclusion であったが、k が高さ 0 へのinclusion であっても納得ができる。つまり、$i' = k$ と見なせる。

$k : X \longrightarrow CX$ は、$q\ :\ X \longrightarrow \{x_0\}$ を cofibration で取り替えたものであるから、

$$k\ :\ X \longrightarrow CX \quad \text{cofibration} \qquad \square$$

Proposition 0.0.5

$$j : Y \hookrightarrow M_f\ ,\ p : M_f \longrightarrow C_f$$

に対し、

$$p \circ j : Y \longrightarrow C_f \quad \text{cofibration}$$

であり、cofiber は、ΣX と同相である。

proof) $p \circ j : Y \longrightarrow C_f$ が、

$$k : X \longrightarrow CX$$

の push out であることを示す。とりあえず push out をとると、

$$\tilde{j} : Y \longrightarrow Y \cup_X CX \qquad \text{cofibration}$$

が導かれるが、$Y \cup_X CX = C_f$, $\tilde{j} = p \circ j$ であることは、すぐにわかる。さらに、

$$C_f / p \circ j(Y) = Y \cup_X CX / Y \cong \Sigma X$$

であるのもよいだろう。 $\square$

さて、これにより、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X$$

と言った列が出てくる（ただし、q は projection)。まぁ、本来なら純粋な cofiber ではなく、homotopy cofiber で続けていくのが、流儀なので正確には、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{p'\circ j'} C_{p\circ j}$$

であるのだが、$p\circ j$ の cofiber と、homotopy cofiber は、$p\circ j$ が cofibration であるため、prop **??** , prop **??** より、homotopy 同値である。それゆえに置き換えているだけである。

では次は、上の列のさらに右に続けていくことを考える。純粋な homotopy cofiber の列の方で考えれば、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{p'\circ j'} C_{p\circ j} \xrightarrow{p''\circ j''} C_{p'\circ j'}$$

しかし、先ほど $C_{p\circ j} \simeq \Sigma X$ で置き換えた。では、 $C_{p'\circ j'}$ はなんなのだろうか？これは、先ほどを思い出せば、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f$$

から、その右に ΣX がでてきた。よって、

$$Y \xrightarrow{p} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X$$

の右には ΣY が来ることが予想される。予想と言うか、すでに prop 0.0.5 で証明済みなのである。

Remmark 0.0.6

$$j' : C_f \hookrightarrow M_{p\circ j} \ , \ p' : M_{r\circ j} \longrightarrow C_{p\circ j}$$

に対し、

$$p' \circ j' : C_f \longrightarrow C_{p\circ j} \quad \text{cofibration}$$

であり、cofiber は ΣY である。

つまり、 $C_{p'\circ j'} \simeq \Sigma Y$ であり、この事実を使うと、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{p'\circ j'} C_{p\circ j} \xrightarrow{p''\circ j''} C_{p'\circ j'}$$

の列は、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$$

と見なせるわけである。

ところで、 $\Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ は、無論、 $p'' \circ j''$: $C_{p\circ j} \longrightarrow C_{r'\circ j'}$ から、誘導されてくるのだが、次のような写像を考えよう。

Definition 0.0.7

f : $X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\Sigma f \ : \ \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$$

を、$f \times 1_I$: $X \times I \longrightarrow Y \times I$ からの誘導で定義する。

この Σf : $\Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ と、 $p'' \circ j''$: $C_{p\circ j} \longrightarrow C_{p'\circ j'}$ はどういった関係なのか。すぐに思いつくのは、

$$\begin{tikzcd} \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma Y \\ C_{p\circ j} \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "p''\circ j''"'] & C_{p'\circ j'} \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

の図式が可換であるのではないかということだが、残念ながらそれは正しくない。しかし、若干弱く、homotopy 可換にはなっているのである。ちなみに、縦の homotopy equivalence は、何から誘導されたのかを思い出せば、projection であることに気づくのは容易い。

Lemma 0.0.8

$$\begin{tikzcd} \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma Y \\ C_{p\circ j} \arrow[u, "k"] \arrow[r, "p''\circ j''"'] & C_{p'\circ j'} \arrow[u, "l"'] \end{tikzcd}$$

の図式は、homotopy 可換である。ただし、 i , k は projection。

proof)　懸垂や錐などは、空間としてのイメージがつかみやすいと思いますので、一応図も載せておきます。

ところで、図からもわかるように、$C_{p\circ j}$ というのは、cone が 2 つくっついた形である。つまり、

$$C_{p\circ j} \cong CX \cup_f CY$$

であるので、 $\alpha \in C_{p\circ j}$ において、

$$\alpha = [x,t]\ ,\ \text{あるいは、}\alpha = [y,s]$$

と書ける。

$$\Sigma f \circ k[x,t] = \Sigma[x,t] = [f(x),t] \quad , \quad \Sigma f \circ k[y,s] = \Sigma f(*) = *$$

$$i \circ p'' \circ j''[x,t] = i[x,t] = * \quad , \quad i \circ p'' \circ j''[y,s] = i[y,s] = [y,s]$$

ここで、 $H\ :\ C_{p\circ j} \times I \longrightarrow \Sigma Y$ を次で定義する。

$$H([x,t],u) = [f(x),ut] \quad , \quad H([y,s],u) = [y,(1-u)s]$$

これが well definded で連続なのは確認しておいてください。（とか言って、致命的にここで違ってたりして）

$$H([x,t],0) = [f(x),0] = * \quad , \quad H([y,s],0) = [y,s]$$

$$H([x,t],1) = [f(x),t] \quad , \quad H([y,s],1) = [y,0] = *$$

よって、題意の図式はホモトピー可換になる。 □

と言うわけで、可換ではないものの、homotopy 可換が言えたので、以前の列の $\Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$ の写像は、Σf と見なす。つまり、ここに次のような列が誕生した。

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

では、長くなったがここで、この列の意味を改めて考えていこう。「列」と言って思いつくのは、exact sequence やら、chain complex などであるが、それらは群や R-module と準同型で構成されていた。上の列は位相空間と連続写像の列である。無論、これは exact sequence とも後々深い関わりがある。

Definition 0.0.9

$i : A \longrightarrow X$ cofibration において、

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/A$$

を cofiber sequence と呼ぶ。

これは、特に目新しい事項と言うわけでもない。しかし、残念ながら話題になっている

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p \circ j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

の列は cofiber sequence ではない。しかし、非常に近い性質を持っていることは確かである。そこで今、cofiber sequence をやや広げた感のある列と言うのを考えてみよう。

Definition 0.0.10

位相空間と連続写像の列、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

が、homotopy cofiber sequence であるとは、ある cofiber sequence

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B/A$$

と、homotopy equivalence である各連続写像

$$a : X \xrightarrow{\simeq} A \ , \ b : Y \xrightarrow{\simeq} E \ , \ c : Z \xrightarrow{\simeq} B$$

が存在し、次の図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "p"'] & B/A
\end{tikzcd}$$

を homotopy 可換にする。また、より一般に長い列

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

において、どの連続する 3 項も homotopy cofiber sequence であるとき、この長い列を homotopy cofiber sequence と呼ぶ。

Corollary 0.0.11

cofiber sequence は、homotopy cofiber sequence である。

proof)　$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/A$ cofiber sequence とすれば、次の図式より明らか。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "="] & X/A \arrow[d, "="] \\ A \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, "p"'] & X/A \end{tikzcd}$$

Proposition 0.0.12

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

は、homotopy fiber sequence である。

proof)　$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f$ は、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "="'] & Y \arrow[r, "p\circ j"] \arrow[d, "j"] & C_f \arrow[d, "="] \\ X \arrow[r, "i"'] & M_i \arrow[r, "p"'] & C_f \end{tikzcd}$$

の図式で、j と r が互いに homotopy inverce であったことを思い出せば、この図式は homotopy 可換となるので、homotopy cofiber sequence である。次に、

$$Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X$$

は、純粋な cofiber sequence である。そして、最後に、

$$C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

について見ると、

$$\begin{tikzcd} C_f \arrow[r, "q"] \arrow[d, "="'] & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] \arrow[d] & \Sigma Y \arrow[d, "="] \\ C_f \arrow[r, "p'\circ j'"'] & C_{p\circ j} \arrow[r] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

が、homotopy 可換であることは、lemma 0.0.8 の時のように考えていけばすぐにわかる。 $\square$

そして、考えたくなってくるのが

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

のさらに右側に列を続けていくことである。もうここまでくればわかると思うが、この後は、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma(p\circ j)} \Sigma C_f \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma\Sigma X \longrightarrow \cdots$$

と言った感じになり、これまた homotopy cofiber sequence になることは、この一連の流れを繰り返すことになるのでよいだろう。また表記上、あまりにΣが多いと、それもまたウザイので次のように書こう。

Definition 0.0.13

位相空間 X に対し、

$$\Sigma^n X \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\Sigma\Sigma\Sigma\cdots\Sigma}_{n\text{ 回}} X$$

とし、X の n 重懸垂空間 (n-fold suspension space) と呼ぶ。

Theorem 0.0.14

$f : X \longrightarrow Y$ に対し、次の homotopy cofiber sequence が存在する。

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p\circ j} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma(p\circ j)} \Sigma C_f \xrightarrow{\Sigma q} \Sigma^2 X \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \Sigma^n X \xrightarrow{\Sigma^n f} \Sigma^n Y \xrightarrow{\Sigma^n(p\circ j)} \Sigma^n C_f \xrightarrow{\Sigma^n(q)} \Sigma^{n+1} X \longrightarrow \cdots$$

Definition 0.0.15

上の Theorem の列を、f の homotopy cofiber sequence と呼ぶ。